

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD AZCAPOTZALCO**

Maestría en Ciencias de la Computación

Área: Cómputo científico

“Predicción de precios futuros de acciones representativas de la Bolsa Mexicana de Valores (Índice de Precios y Cotizaciones, IPC) mediante técnicas de inteligencia artificial”

Idónea comunicación de resultados para obtener el grado de
Maestro en Ciencias de la Computación

Presenta:

Ing. Juan Andrés Martínez Escobar

Asesores:

Dra. Silvia Beatriz González Brambila

Dr. Román Anselmo Mora Gutiérrez

Sinodales: Dr. Domingo Rodríguez Benavides, Dr. Eduardo Morales Manzanares, Dra. Silvia Beatriz González Brambila y Dr. Luis Fernando Hoyos Reyes.

17 de julio de 2020

Agradecimientos

A mis padres, hermano y abuelos por todo su amor, apoyo, paciencia y confianza.

A mis asesores por su valioso tiempo, ayuda, enseñanzas, comentarios y sugerencias.

A mis amigos y compañeros por su apoyo y alegría dentro y fuera de la Universidad.

A todos los profesores de la Maestría en Ciencias de la Computación por su tiempo,
sus enseñanzas y comentarios.

Índice

Agradecimientos.....	III
Resumen.....	X
Abstract.....	XI
1. Introducción.....	1
1.1 Antecedentes.....	2
1.2 Justificación.....	7
1.3 Objetivo.....	8
1.3.1 Objetivo general.....	8
1.3.2 Objetivos específicos.....	8
2. Conceptos Básicos.....	10
2.1 Econometría.....	10
2.2 Series de Tiempo.....	10
2.3 Mercado Bursátil Mexicano.....	10
2.4 Proceso estocástico.....	10
2.5 Proceso estacionario.....	11
2.6 Ruido blanco.....	11
3. Fundamentos teóricos.....	11
3.1 Pronóstico.....	11
3.2 Series de Tiempo y Pronóstico.....	14
3.2.1 Movimiento Geométrico Browniano.....	14
3.2.2 Nuevos paradigmas.....	16
3.3 Optimización y Pronóstico.....	16
3.3.1 Antecedentes.....	16
3.3.2 Optimización.....	16
3.3.2.1 Técnicas Heurísticas.....	20
3.4 Medidas de desempeño de algoritmos multiobjetivo.....	22
3.4.1 Hipervolumen.....	23
3.4.2 Distribución.....	23

3.4.3	Distancia generacional inversa	24
3.4.4	Cobertura de conjuntos.....	24
4.	Metodología	25
4.1	Descripción.....	25
4.1.1	Generación de la base de datos	25
4.1.2	Filtrado de la base de datos	26
4.1.3	Adaptación de Heurísticas.....	29
4.1.4	Implementación con un Modelo Geométrico Browniano	32
4.2	Experimentación	33
5.	Resultados experimentales	34
6.	Conclusiones y trabajo futuro	40
	BIBLIOGRAFIA	42
	ANEXO 1.....	47
	ANEXO 2.....	84
	ANEXO 3.....	96
	ANEXO 4.....	97

Índice de Figuras

Figura 1. Producciones científicas sobre pronóstico de acciones entre 1997 y 2020. Fuente: Generada a partir de los datos de la consulta en ScienceDirect.....	7
Figura 2. Comparativo sobre el porcentaje de trabajos aplicados a bolsas de valores de tres países. Fuente: Generada a partir de los datos de las consultas en ScienceDirect.	8
Figura 3. Proceso para la construcción de conocimiento.	17
Figura 4. Diagrama de flujo de Búsqueda armónica	21
Figura 5. Diagrama de flujo de Algoritmo Genético.....	22
Figura 6. Diagrama general del modelo.	25
Figura 7. Diagrama del Filtrado de variables.....	26
Figura 8. Representación del individuo en el algoritmo básico. Fuente: Elaboración propia	30
Figura 9. Ejemplo de representación de población de individuos	30
Figura 10. Frentes de Pareto de los objetivos del modelo antes del filtrado de datos.	35
Figura 11. Frentes de Pareto de los objetivos del modelo después del filtrado de variables.	35
Figura 12. Pronóstico del valor/ <i>stock</i> (BI****) antes del filtrado de variables	36
Figura 13. Pronóstico del valor/ <i>stock</i> (BI****) después del filtrado de variables.....	36
Figura 14. Frente de Pareto del modelo con AG	39
Figura 15. Frente de Pareto del modelo con HS.....	39

Índice de Algoritmos

Algoritmo 1. Pseudocódigo de Recocido Simulado empleado	29
Algoritmo 2. Sección del algoritmo de Búsqueda Armónica para creación de nueva memoria de armonías. Fuente: Elaboración propia.....	32

Índice de Tablas

Tabla 1. Métodos comunes de pronóstico	12
Tabla 2. Tabla comparativa de número de variables a usar en cada acción (<i>stock</i>)	37
Tabla 3. Resultados obtenidos al evaluar las técnicas empleadas para la búsqueda de mejores variables del MGB.....	38
Tabla 4. Resultados resumidos de las medidas del desempeño de ambos algoritmos.	38

Lista de acrónimos

IA: Inteligencia Artificial

IPC: Índice de Precios y Cotizaciones

mGB: movimiento Geométrico Browniano

MGB: Modelo Geométrico Browniano

AG: Algoritmo Genético (GA, *Genetic Algorithm*)

HS: Búsqueda Armónica (*Harmony Search*)

BMV: Bolsa Mexicana de Valores

SVM: *Support Vector Machines*

ANN: *Artificial Neural Networks*

RF: *Random Forest*

SVR: *Support Vector Regression*

ARMA: *Autoregressive Moving Average*

RLM: Regresión Lineal Múltiple

R^2 : Porcentaje de variación en y explicado por x

SST: Suma del total de cuadrados (*Sum of Squares Total*)

SSE: Suma de los errores cuadráticos (*Sum of Squares Error*)

SSR: Suma de los cuadrados de la regresión (*Sum of Squares Regression*)

θ : Coeficientes de regresión

PCA: Análisis de Componentes Principales (*Principal Component Analysis*)

Resumen

En este trabajo, se presenta una nueva metodología para analizar y predecir el comportamiento de acciones de la Bolsa Mexicana de Valores basada en la concatenación sinérgica de estrategias estadísticas no paramétricas y modelos multiobjetivos de optimización. Esta metodología involucra dos fases, la primera, de filtrado, constituye un proceso automatizado para el análisis, evaluación y selección de la información necesaria y pertinente, para la caracterización del comportamiento de cada acción; posteriormente, la segunda, fase de ajuste del modelo, involucra adaptar y resolver un modelo multiobjetivo para la predicción de precios de las acciones seleccionadas.

La base de datos empleada considera el comportamiento de doce acciones representativas en la Bolsa Mexicana de Valores en el periodo 2006 al 2016, el código fuente utilizado se encuentra disponible en "<http://bit.ly/396h3J1>"; los datos fueron obtenidos de una plataforma especializada sobre el mercados financieros en Latinoamérica [1]. Los resultados numéricos obtenidos muestran que la fase de filtrado es capaz de identificar un conjunto compacto de variables relevantes con alta influencia en el precio futuro de cada acción en particular. En la segunda fase, se emplearon los datos del 2016 como valores a predecir sobre el modelo multiobjetivo y, comparado con el modelo de regresión lineal múltiple, se observa una mejora considerable en la calidad de los datos pronosticados, haciendo que el modelo generado a partir de la segunda fase tenga una confiabilidad mayor al 95%.

Abstract

In this work, a new methodology is presented to analyze and predict the behavior of stocks of the Mexican Stock Market based on the synergistic concatenation of non-parametric statistical strategies and multi-objective optimization models. This methodology involves two phases. The first (filtering) leverages an automated process for the analysis, evaluation, and selection of the necessary and relevant information: for the characterization of the behavior of each action. The second (the model adjustment phase) involves adapting and solving a multi-objective model for the prediction of prices of the selected stocks.

The database used in this work includes the behavior of twelve significant stocks in the Mexican stock exchange in the period 2006 to 2016, the source code used is available in "<http://bit.ly/396h3J1>"; the data was obtained from a specialized financial markets platform for Latin America. The numerical results show that the filtering phase can identify a compact set of relevant variables with a significant influence on the future price of each stock. In the second phase, the data from 2016 is used to predict the multi-objective model, that compared with the multiple linear regression model, provides a considerable improvement in the quality of the predicted observed data. The model generated from the second phase has reliability greater than 95%.

1. Introducción

En este trabajo, se presenta una metodología para la organización, análisis y predicción de valores sobre el precio de cierre de acciones de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). Esta metodología se encuentra dividida en dos fases, en la primera fase se analiza, selecciona y filtra la información; en la segunda fase se emplea el conjunto de información reducido en la primera fase con el objeto de producir o generar un conjunto de coeficientes capaces de minimizar el error en los pronósticos, considerando la aleatoriedad de los movimientos. En este trabajo se propone una metodología que permite resolver de manera sinérgica los problemas de selección de información y predicción de valores.

La calidad de los pronósticos realizados se puede mejorar con un modelo de regresión lineal múltiple a través de un filtrado adecuado de datos y del empleo de un modelo multiobjetivo. Cabe mencionar, que en la segunda fase, el modelo ajustado se empleó para pronosticar un año específico con el objeto de cuantificar y caracterizar el comportamiento de las acciones analizadas.

En términos generales, el problema abordado en este trabajo se define como, dado un conjunto de variables predictoras X y una variable respuesta (dependiente) Y , y \hat{Y} respuesta pronosticada, se desea encontrar un subconjunto X' tal que $X' \subset X$, el cual genere el $\arg \min(z)_{f(X') \rightarrow \hat{Y}} : \sum_{i=1}^n (Y - \hat{Y})^2$.

En la actualidad, la selección de la información pertinente para describir, caracterizar y analizar un fenómeno es una actividad relevante; ya que los avances tecnológicos han propiciado que las personas tengan acceso a una gran cantidad de información. Es decir, el desarrollo tecnológico ha incentivado una nueva forma de comunicación en red, asincrónica, rápida y efectiva sin depender de un lugar físico, y a veces el lenguaje no es un impedimento [2]; sin embargo la gran cantidad de información disponible conlleva a buscar estrategias de filtrado para manipular y analizar un subconjunto relevante y pertinente que permita la toma de decisiones de manera estratégica.

Por otro lado, la predicción de precios en el mercado de valores es una actividad importante en el ámbito económico y bursátil. El sistema económico bursátil es complejo ya que intervienen múltiples actores (empresas, gobierno, sociedad, entre otros), y sus posibles interacciones.

1.1 Antecedentes

En la literatura existen múltiples trabajos que versan sobre el desarrollo de estrategias computacionales para predicción de acciones e índices. Dentro de estos, se encuentran el uso de Redes neuronales artificiales [3], *Support Vector Machines* (SVM) [4], arboles de decisión [5] entre otros métodos de Inteligencia Artificial. Algunos autores han optado por combinar técnicas de IA en sus modelos propuestos, para mejorar los resultados de predicción. Por ejemplo, en el estudio de Choudhry y Garg [6], realizaron un modelo híbrido GA-SVM, implementando en los datos de entrada una primera fase con un Algoritmo Genético (AG), para posteriormente realizar, con los datos obtenidos, una segunda fase con SVM. Este trabajo contó con 35 valores técnicos como entrada para el modelo, sin embargo, proponen cambiar el número de entradas, para obtener un rendimiento mayor en la predicción de precios futuros. Trabajaron con tres conjuntos de valores (stocks) de los más prominentes de la bolsa de valores de la India. Entre los resultados obtenidos de este estudio, se encuentra una mejora significativa en el rendimiento de la ejecución del modelo híbrido en contraste con el modelo de una sola capa de SVM.

A finales del otoño de 2014, Patel & Shah [7] implementaron algoritmos en dos capas para predecir los índices bursátiles. Se trabajó con los índices llamados “*CNX Nifty*” y “*S&P Bombay Stock Exchange (BSE) Sensex*” del mercado de valores de India, realizaron predicciones a futuro de 1-10, 15 y 30 días, en el modelo propuesto, por otro lado, se maneja una predicción de un día a futuro. Entre sus conclusiones mostraron una mejor predicción cuando se utilizó un acercamiento de dos etapas, haciendo uso en la primera etapa de regresión de soporte vectorial (SVR), y en la segunda etapa se usó Redes Neuronales Artificiales (ANN), *Random Forest* (RF) y SVR, tipos de acercamientos distintos al elegido en este trabajo para el problema de predicción. El resultado son modelos de predicción SVR-ANN, SVR-RF y SVR-SVR. Se compararon los resultados de estos modelos junto con los de una sola etapa, y se obtuvo un mejor resultado en los modelos de dos etapas, el modelo que mostró un mejor desempeño de estos fue SVR-ANN. Este método final de implementación de dos capas es propuesto por los autores para ser aplicado en otros campos, como predicción del clima, consumo de energía, entre otros.

Para predecir el comportamiento del mercado de valores, se ha notado una división de estudios, hay quienes trabajan con los índices bursátiles, que de alguna manera representan la economía de un país o en ciertos casos sectores de la economía. Cabe mencionar que estos índices son calculados de maneras diferentes como son el Dow Jones en USA, que datan de hace más de un siglo, este índice se calcula con un promedio simple. Hay otros trabajos realizados que se centran en las acciones específicas de ciertas empresas, que pueden ser fuertes y estables o de capitales bajos o pequeños, aunque también se pueden encontrar estudios que trabajan con ambos.

De igual manera la labor de pronosticar el estado del mercado financiero, se divide nuevamente en dos, algunos investigadores optan por predecir el precio exacto de las acciones [8] o valores de índices con los que decidieron trabajar, por otra parte, hay quienes buscan predecir los movimientos de estos valores, su dirección o tendencia [9]. En la literatura consultada, se ha mencionado que para los inversionistas es más útil y benéfico, conocer las tendencias del mercado que predecir el valor de las acciones, con este argumento, se han realizado varias investigaciones, y las variables de entrada que utilizan los investigadores, indicadores técnicos en la mayoría de los casos, son normalizadas e indican una tendencia pronosticada del valor en estudio.

La capacidad de predecir la dirección y no el valor exacto de los precios futuros de las acciones es el factor más importante para ganar dinero mediante la predicción financiera. Lo que el inversor generalmente necesita saber para tomar una decisión de compra o venta, es la dirección esperada de las acciones. Los estudios también han mostrado que la predicción de la dirección en comparación con el valor puede generar mayores ganancias [3], [7], [9]–[11].

En la literatura consultada, se ha mostrado que para realizar las tareas de predicción en el mercado accionario, se requiere añadir indicadores técnicos que aporten información sobre el movimiento del precio de las acciones. Estos indicadores son: Media Móvil Simple (*Simple Moving Average, SMA*), Media Móvil Ponderada (*Weighted Moving Average, WMA*), Índice de Fuerza Relativa (*Relative Strength Index, RSI*), Media Móvil Convergencia Divergencia (*Moving Average Convergence Divergence, MACD*), por nombrar algunos, mismos que son utilizados por personas especializadas en el tema [6].

Una buena parte del trabajo a realizar corresponde a la selección de las variables adecuadas que aporten información valiosa al modelo de predicción, en varios trabajos encontrados en la literatura, se observa la adición de indicadores técnicos a los modelos de predicción, y, el valor de acciones relacionadas y de índices. De igual manera, hay trabajos cuyos modelos construidos incluyen una cantidad de variables para la predicción desde 10 indicadores técnicos[3] a 23 variables [12], de las cuales alimentan su modelo. El número de entradas varía en la literatura, con trabajos a partir de un par de años de datos “día a día”, como otros que llegan a los 10 años de entradas.

De igual manera hay modelos implementados en la predicción de precios para cierto tiempo futuro, pudiendo ser en promedio de uno a tres días a futuro, tiempos largos como una semana o un mes (30 días), o cortas, como implementaciones para series de tiempo de minuto a minuto [8].

En un estudio realizado a inicios de este siglo [13], pronosticaron el “*Taiwan Stock Index*”, empleando una red neuronal probabilística (PNN), con datos históricos de enero de 1982 a agosto de 1992 separados en dos periodos, tomando el primer periodo para

entrenamiento y selección de variables y el segundo para probar los modelos. En este estudio se demostró que la red neuronal probabilística (PNN) tiene un mayor poder de predicción que los métodos de momentos generalizados (GMM) con filtro Kalman. También señalaron que la estrategia de inversión obtenida por PNN resultó con una mayor ganancia que otras estrategias de inversión utilizadas. Hicieron uso de un método de selección de variables distinto al del modelo propuesto además de probar su modelo contra otras estrategias de inversión, algo que no formó parte de este trabajo.

En ese mismo año se realizó otro estudio en Corea [14], en el cual, se centran en demostrar que el uso de SVM's para la predicción de dirección de precios del mercado de valores obtiene mejores resultados que ANN y también se presenta razonamiento basado en casos (CBR), a diferencia del modelo propuesto, donde se busca predecir el valor de una acción. La base de datos con la que trabaja está constituida por la dirección de cambio diaria del índice bursátil "*Korea Composite Stock Price Index*" (KOSPI) y doce indicadores técnicos seleccionados por expertos en el tema y por una investigación realizada por el autor (%R, RSI, *Disparity 10*, %K, *Momentum*, %D, etc. como se han mencionado). Debido a que el estudio intenta predecir la dirección de cambio del valor del índice, los resultados son categorizados como 0 o 1, indicando si al siguiente día el índice tiene un valor más bajo o si es más alto, respectivamente. El número total de muestras consta de 2,928 días de enero de 1989 a diciembre de 1998. Dividiendo los datos en 20% para prueba y 80% para entrenamiento. Los datos originales son escalados en un rango de [-1.0, 1.0] para que valores más grandes de entrada no disminuyan el impacto de los valores de entrada más pequeños, intentando reducir errores de predicción. Los modelos presentados en el artículo son implementados con sus respectivas variaciones, con el SVM lineal solo se modifica la constante C, con el modelo no lineal se utiliza un kernel Gaussiano, variando sus coeficientes. Para CBR varía el número de casos de alimentación para el nuevo problema de 1 a 5. En BPN (ANN), se utilizan tres capas, y permite 50, 100 y 200 "epochs" de aprendizaje.

Los resultados obtenidos muestran una pequeña mejoría en la predicción del movimiento del valor del índice por parte del modelo SVM en el mejor arreglo de sus coeficientes, en comparación con el modelo BPN y CBR, sin embargo, este porcentaje de exactitud sigue permaneciendo muy cerca del 50%, lo que indica una predicción muy baja y cerca de la aleatoriedad.

En el año siguiente, se publicó un estudio, donde se propone el estudio de diferentes mercados entre ellos el mercado mexicano [15]. En ese artículo se analizaron los movimientos diarios de tres índices de mercados de valores de economías emergentes, los cuales son: IPC (México), KLSE (Malasia), y Bovespa (Brasil). La serie de tiempo comprende de Enero de 1990 a Diciembre de 2003, estas bases de datos le fueron entregadas por las bolsas de valores de cada país a los autores. En este estudio se intentó predecir la

dirección de los valores de cierre de los índices (1 para una subida y 0 indicaba una disminución), una diferencia notoria con el presente trabajo, que obtiene una predicción del precio de una acción. Se utilizaron indicadores técnicos para las variables de entrada de los modelos, los cuales fueron: Índice de fuerza relativa (RSI) 14-días, RSI estocástico 14-días, Momento 4-días, Disparidad 14-días, Disparidad 21-días, Oscilador de precios (*Price Oscillator*) y tasa de Cambio de Precio (*Price rate-of-change*) 1 y 2 días, los cuales fueron normalizados de 0 a 1. Se utilizó el 80% de los datos para entrenamiento. Las técnicas de clasificación que fueron utilizadas en este trabajo fueron: el modelo de regresión logística (*Logit*), Redes neuronales, modelos basados en árboles con dos modelos de predictores, máquina de potenciador de gradiente (*Gradient Boosting Machine*), *Random Forest* y *PolyClass*, un método de clasificación híbrido del modelo MARS. Menciona que la mayoría de las implementaciones se realizaron en el lenguaje R y las redes neuronales se implementaron en MATLAB. Los resultados obtenidos mostraron que a pesar de los bajos porcentajes de exactitud, se alejaban considerablemente de una predicción aleatoria, con estos resultados se prosigió a realizar una simulación de “trading”, con *Gradient Boosting Machine* para IPC (México), *Random Forest* para KLSE (Malasia) y Bovespa (Brasil), la cual no se realiza en este trabajo. A pesar de haber obtenido un mejor resultado de predicción o ganancias de la simulación de “trading”, no se encontró eficiencia debido a que los costos de las transacciones acababan con los beneficios del comercio.

En años más recientes, se encuentran estudios que incluyen además de las variables convencionales (indicadores técnicos), nuevas y novedosas variables [16], los autores proponen en el artículo un modelo que consta de tres fases principales, en su primera fase obtienen datos y generan características de los datos, los cuales son: información de *stocks* (precios de apertura y cierre, volumen, índices *Nasdaq*, etc.); indicadores técnicos usados comúnmente que reflejan la variación del precio en el tiempo; el conteo de noticias posteadas en Google News relacionadas al *stock* y el número de visitas a la página de *Wikipedia* pertinente, estas últimas variables no fueron tomadas a consideración en el presente trabajo. Los datos obtenidos de la información de los *stocks* abarca del 1 de mayo de 2012 al 1 de junio de 2015, un conjunto de datos histórico considerablemente menor al usado en el trabajo presentado.

En la siguiente fase realizan la selección de variables o características que brinden un mayor poder de predicción, mediante eliminación recursiva de características (RFE) y SVM-RFE. Después compararon la efectividad de los modelos propuestos (Redes neuronales, Árboles de decisión y SVM), usando AUC como el criterio de evaluación primario del desempeño de los algoritmos de IA propuestos.

Al finalizar el trabajo crearon un sistema gráfico para predecir los movimientos a un día en el futuro del precio de las acciones. Mencionan que su sistema puede ayudar a cuantificar el riesgo o la incertidumbre de un escenario de inversiones.

Se observa en la literatura consultada, que la mayoría de los estudios realizados para la predicción de precios o movimientos tanto de índices como de acciones concretas, es realizada en mercados de valores de economías emergentes o en desarrollo, México es considerado un país en vías de desarrollo cuyo mercado de valores tiene potencial para su crecimiento y apoyo a la economía del país, según ha mencionado la Secretaría de Economía y expertos en la materia en años recientes [17].

Se han desarrollado, desde el siglo pasado, modelos estadísticos para series temporales tomando en cuenta que, cada observación en un momento dado, es modelada en función de los valores anteriores [18].

Los modelos se conocen con el nombre de AR-MA (Auto regresivo de medias móviles) que deriva de sus componentes AR (*Auto Regressive*) y MA (*Moving Average*). El cual es aplicado para la predicción de series temporales estacionarias[19]. En series no estacionarias, los datos deben ser transformados a su forma estacionaria.

De igual manera se han presentado trabajos en los que utilizan el movimiento Geométrico Browniano (mGB) para las tareas de pronóstico de precios [20], [21], hay algunos que usan el mGB para ciertas tareas dentro de algoritmos bioinspirados [22], y otros que utilizan también el principio del mGB para implementar un modelo de predicción [23]–[25].

Mason & Wilmot [20] en 2016, realizaron predicciones de precio sobre el mercado emergente de combustibles renovables en Estados Unidos, el cual al manejar materias primas, se alimenta con nueva información que puede producir cambios bruscos o saltos; explican que puede tener un comportamiento más complejo que el MGB, así que, tomando como base el movimiento geométrico browniano, al igual que en el modelo propuesto, desarrollan modelos de predicción de precios, y obtuvieron resultados con una cantidad aceptable de error, aunque no incorporan una fase robusta de selección de variables como en el presente trabajo.

Para la búsqueda de mejores parámetros para la implementación de un modelo ARMA, se han utilizado algoritmos genéticos (AG) [26], [27], también han usado para la búsqueda de parámetros de vectores de soporte regresión [28], en el presente trabajo se implementan AG y Búsqueda Armónica (HS) [29]–[31], para la búsqueda de parámetros del MGB.

1.2 Justificación

Desde inicios del siglo pasado, la predicción de precios en el mercado de valores ha sido un campo de desarrollo científico, debido al gran impacto económico y social que conlleva esta actividad. Se debe mencionar, de acuerdo con la consulta realizada, que de 2000 a 2019, se han publicado en la plataforma *ScienceDirect* [32] 18,144 trabajos relacionados sobre este tema, sin embargo, en predicción de precios de la BMV, el promedio anual es bajo (realizando la consulta en el buscador de *ScienceDirect* con los términos “stock price prediction in stock exchanges” acotando los resultados en los años seleccionados).

En la Figura 1, se muestra el número de trabajos reportados en *ScienceDirect* sobre el pronóstico de acciones en las bolsas de valores en el mundo en el periodo del año 1997 al 2020 (con la consulta mencionada acotando los años). Por otro lado en la Figura 2, se muestra un comparativo sobre el porcentaje de trabajos de pronósticos que han sido desarrollados para las bolsas de Estados Unidos de América (USA, por sus siglas en inglés), Hong Kong y México, entre 1997 y 2020, donde se observa que durante la primera década de este siglo la Bolsa de Valores de USA, tiene alrededor del 50% del total de trabajos producidos, cambiando por una tendencia decreciente hasta llegar a solo ser empleada en 25% de los trabajos. Tanto México como Hong Kong han representado entre el 10% y el 20% de las investigaciones (búsquedas realizadas en el sitio web de ScienceDirect con los términos mencionados arriba, añadiendo las palabras “USA”, “Hong Kong” y “México” respectivamente, acotando los resultados en los años mencionados).

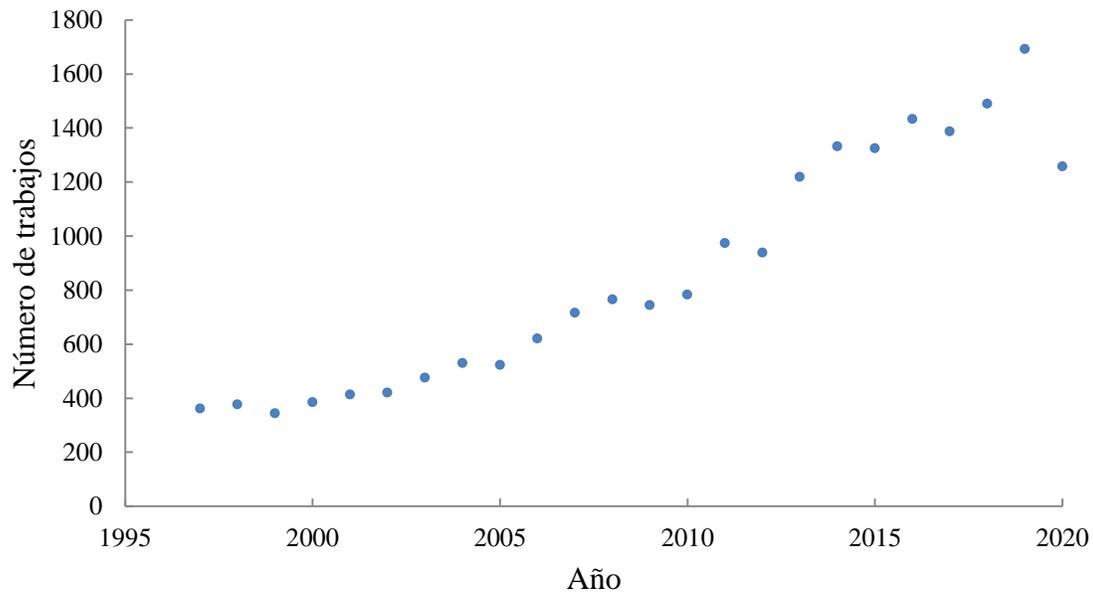


Figura 1. Producciones científicas sobre pronóstico de acciones entre 1997 y 2020. Fuente: Generada a partir de los datos de la consulta en ScienceDirect.

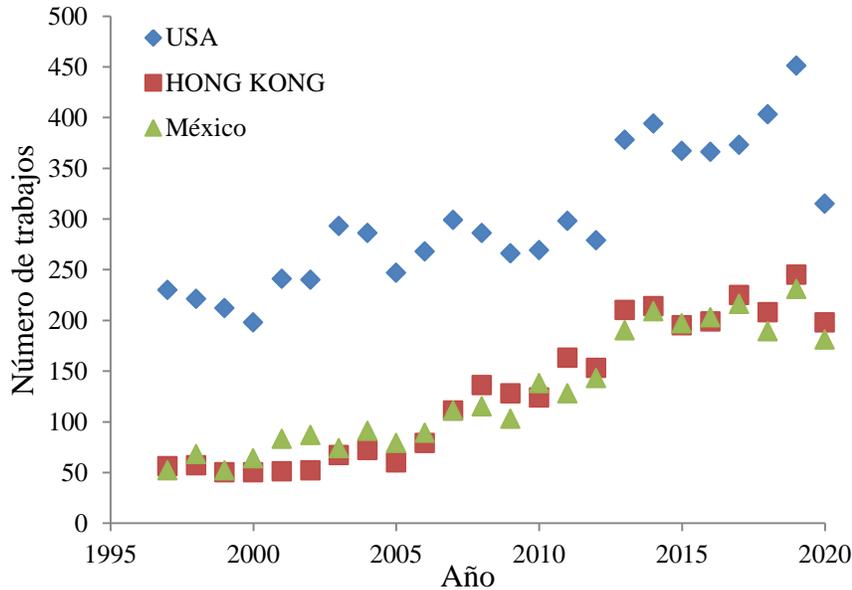


Figura 2. Comparativo sobre el porcentaje de trabajos aplicados a bolsas de valores de tres países. Fuente: Generada a partir de los datos de las consultas en ScienceDirect.

El objeto de esta investigación, es presentar una metodología semiautomática, basada en estrategias de inteligencia artificial, para tratar y analizar la información de acciones para una predicción adecuada de los precios en la BMV. Cabe mencionar que la base de datos se incluye la información de doce empresas mexicanas en el periodo comprendidos de enero de 2006 a diciembre de 2016.

1.3 Objetivo

1.3.1 Objetivo general

“Proponer un modelo para predecir con un margen de error razonablemente pequeño, precios futuros del mercado accionario en México, usando técnicas de aprendizaje de máquina. El modelo recibirá como entrada datos históricos e indicadores técnicos”.

1.3.2 Objetivos específicos

Estos siguientes objetivos fueron planteados en la fase inicial del proyecto, los cuales se cumplieron en su totalidad.

- Obtener y procesar una base de datos del histórico de acciones e indicadores del mercado de valores mexicano seleccionados por un periodo de 10 años. En principio

se propondrá de 2006 a 2015 para tener un conjunto de datos aceptable para pronosticar 2016.

- Construir la base de datos.
- Determinar los indicadores que influyen en mayor medida en la variación del precio de las acciones con procesamiento y análisis de las variables de entrada, que consiste en tomar una muestra de la base de datos, y cambiar los conjuntos de variables de entrada para seleccionar aquellos que tengan mayor poder de predicción.
- Desarrollar una técnica eficiente de filtrado de la información con el objeto de conseguir un conjunto de cardinalidad menor que permita describir el comportamiento de las acciones en la BMV.
- Proponer y desarrollar un modelo multiobjetivo para la predicción de acciones
- Emplear las heurísticas Algoritmos Genéticos (AG) y Búsqueda Armónica (HS) para resolver el problema de predicción.
- Comparar los resultados obtenidos con los procedimientos empleados, analizar ventajas y desventajas de los procedimientos empleados.

Los capítulos que componen el presente trabajo se encuentran organizados de la siguiente manera. **Capítulo 2**, aquí se presenta una descripción de los conceptos básicos de Econometría y Series de tiempo. **Capítulo 3**, en este capítulo se describen los fundamentos teóricos sobre el pronóstico y series de tiempo, el movimiento Geométrico Browniano (mGB) y nuevos paradigmas. En el **Capítulo 4**, se analizan los procesos del modelo propuesto, desde generación de base de datos, pasando por el filtrado, la adaptación de las metaheurísticas y la implementación de un MGB. Dentro del **Capítulo 5**, se muestran los resultados experimentales del filtrado de base de datos y de la implementación de un MGB con parámetros obtenidos con metaheurísticas. En el **Capítulo 6**, se discuten las conclusiones y trabajo futuro. Finalmente se muestran las referencias.

2. Conceptos Básicos

En esta sección se presentan un conjunto de conceptos necesarios empleados en todo el trabajo.

2.1 Econometría

En el estudio de finanzas, resulta imprescindible tener nociones sobre econometría, “una rama de la economía que utiliza métodos matemáticos y estadísticos junto con la programación lineal y la teoría de juegos para analizar, interpretar y hacer predicciones sobre sistemas económicos.”[33] , para llegar a esa definición se ha llevado un proceso largo, en el que participaron varios expertos en el tema a través de los años. Carlos Sabino, la definió como “nombre con el que se designa la aplicación de las técnicas matemáticas y estadísticas a la resolución de problemas de economía” [34].

2.2 Series de Tiempo

Definimos las series de tiempo o series temporales, como el resultado que se obtiene de la observación de los valores de una variable a lo largo del tiempo en intervalos regulares (cada hora, día, mes, cada año, etc.). Las series temporales están presentes en casi todas las situaciones donde se mantienen registros o se realizan mediciones. El interés en ellas difiere entre sus aplicaciones, en unas situaciones nuestro objetivo es pronosticar valores futuros, mientras que en otros solo se estudia su relación con otras series temporales o su estructura[35], [36].

2.3 Mercado Bursátil Mexicano

Como menciona Díaz Mata [37], el sistema bursátil mexicano es el conjunto de organizaciones, tanto públicas como privadas, a través de las cuales se regulan y llevan a cabo las actividades crediticias mediante títulos-valor que se negocian en la BMV, de acuerdo con las disposiciones de la Ley de Mercado de Valores. El mercado bursátil cuenta con los elementos que le permiten operar como un mercado: un espacio físico, demandantes (inversores o compradores), oferentes (emisores directos o casas de corredores de bolsa) y las instituciones reguladoras de las transacciones [37]–[39].

2.4 Proceso estocástico

Un proceso estocástico, es definido como “un conjunto de variables aleatorias $\{z_t\}$ donde el índice t toma valores en un cierto conjunto C . Este conjunto es ordenado y corresponde a los instantes temporales (días, meses, años, etc.). Para cada valor t del conjunto C (para cada instante temporal) está definida una variable aleatoria, z_t , y los valores observados de las variables aleatorias en distintos instantes forman una serie temporal”[35].

2.5 Proceso estacionario

Se dice que “un proceso estocástico es estacionario en sentido estricto si:

- Las distribuciones marginales de todas las variables son idénticas;
- Las distribuciones finito-dimensionales de cualquier conjunto de variables sólo dependen de los retardos entre ellas.

La primer condición establece que la media y la varianza de todas las variables son las mismas. También lo son los coeficientes de asimetría y curtosis de las distribuciones marginales. La segunda condición impone que la dependencia entre las variables sólo depende de sus retardos”[35]. Dicho en palabras más simples, es un proceso estocástico cuya distribución de probabilidad varía de forma más o menos constante a lo largo de cierto periodo de tiempo.

2.6 Ruido blanco

Es un proceso estacionario, definido por las condiciones:

- a) $E[z_t] = 0, t = 1, 2, \dots$
- b) $Var(z_t) = \sigma^2, t = 1, 2, \dots$
- c) $Cov(z_t, z_{t-k}) = 0, k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Donde: a) la esperanza es siempre constante e igual a cero; b) la varianza es constante y c) las variables del proceso están incorreladas para todos los retardos[35]. En otras palabras, el ruido blanco es un proceso estocástico estacionario que se caracteriza por que sus valores en dos momentos diferentes no guardan correlación estadística.

3. Fundamentos teóricos

3.1 Pronóstico

El diseño de herramientas confiables para pronosticar y predecir el comportamiento de fenómenos o sistemas, ha sido objeto de interés en las investigaciones desde hace varias décadas. En términos generales pronosticar se define como la generación de información y conocimiento que permite prever, caracterizar y analizar el comportamiento futuro de situaciones con base en estrategias lógicas, racionales, científicas y de experiencia previa; se debe mencionar, que frecuentemente la información generada por el proceso de pronóstico es empleada para la toma de decisiones. Rubio menciona en [40], que pronosticar es una de las funciones más importantes dentro de las empresas, industrias y negocios; ya que a través de la información producida se toman decisiones. En la Tabla 1 se muestra la clasificación de los métodos de pronósticos comúnmente empleados.

Algunos autores diferencian los conceptos “Pronóstico” y “Predicción”, haciendo énfasis en que el pronóstico se basa en datos de naturaleza objetiva; en contraste, predicción se

basa en información subjetiva. En la actualidad, las metodologías de naturaleza mixta han crecido en su aplicación [41][42].

Métodos de pronósticos	Cuantitativos	Se basan en el empleo de estrategias lógico-matemáticas para el análisis histórico. Generalmente se les denomina procedimientos objetivos.	<ul style="list-style-type: none"> • Series de tiempo • Modelos causales • Modelos de optimización • Modelos de simulación • Otros
	Cualitativos	Se basan en la experiencia e intuición; por ende son procedimientos con un grado de subjetividad.	<ul style="list-style-type: none"> • Método Delphi • Analogías con sistemas similares
	Mixtos	Se basan en la combinación sinérgica de estrategias cuantitativas y cualitativas.	Aquí se encuentran varias estrategias de IA y Machine Learning.

Tabla 1. Métodos comunes de pronóstico

En el presente trabajo, se emplearon métodos cuantitativos que integran procedimientos causales, series de tiempo y de optimización en la generación del modelo predictivo. Dentro de las técnicas de pronóstico clásicas se pueden encontrar de dos tipos, métodos de extrapolación y los métodos de predicción causal, ambos tipos se explican a continuación [43].

Pronóstico con promedio móvil

Sean $x_1, x_2, \dots, x_t, \dots$ los valores de una serie de tiempo, donde x_t es el valor de la serie de tiempo observada durante el periodo t . Se define $f_{t,1}$ como el periodo de pronóstico para el periodo $t+1$, a partir de las observaciones en x_t .

$$f_{t,1} = \text{promedio de las últimas } N \text{ observaciones}$$

Suavizamiento exponencial simple

Tomamos A_t como el promedio suavizado al final del periodo t , a x_{t-1} como el valor real anterior de la serie. Entonces, la ecuación del promedio suavizado exponencial se define:

$$A_t = \alpha x_{t-1} + (1 - \alpha)A_{t-1}$$

Y se elige α que minimice la desviación absoluta media[43].

Método de Holt

Este método es utilizado cuando hay una tendencia presente en la serie de tiempo, pero no estacionalidad. Sea L_t la estimación de la base al final del periodo t , y T_t la estimación de la tendencia por periodo al final del periodo [43], se definen sus ecuaciones:

$$L_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$$

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$$

Donde, α y β son constantes de suavizamiento cuyo valor se encuentra entre 0 y 1.

El pronóstico para el periodo $t + k$, es:

$$f_{t,k} = L_t + kT_t$$

Método de Winter

Este método es utilizado cuando se observa que tanto tendencia como estacionalidad pueden estar presentes en la serie temporal. Sea s_t , la estimación para el factor estacional del mes t [43]. Se definen:

$$L_t = \frac{\alpha x_t}{s_{t-c}} + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$$

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$$

$$s_t = \frac{\gamma x_t}{L_t} + (1 - \gamma)s_{t-c}$$

El pronóstico para el periodo $t + k$, es:

$$f_{t+k} = (L_t + kT_t)s_{t+k-c}$$

Donde, c es el número de periodos en la duración del patrón estacional, y $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$.

Regresión lineal simple

Dados los puntos dato $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, estimamos una relación lineal entre x y y mediante $\hat{y} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 x$, donde:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \text{ y } \hat{\theta}_0 = \bar{y} - \hat{\theta}_1 \bar{x}$$

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \text{porcentaje de variación en } y \text{ explicado por } x$$

r_{xy} = correlación lineal de la muestra entre x y y

$$s_e = \sqrt{\frac{SSE}{n - 2}} = \text{raíz del error cuadrático medio}$$

Donde:

SST es la suma del total de cuadrados (*Sum of Squares Total*), SSE es la suma de los errores cuadráticos (*Sum of Squares Error*), SSR es la suma de los cuadrados de la regresión (*Sum of Squares Regression*), $\hat{\theta}_0$ y $\hat{\theta}_1$ son los coeficientes de regresión a estimar.

Esperamos que 68% de los pronósticos están dentro de s_e del valor real y 95% de las predicciones, dentro de $2s_e$ del valor real. Una estadística t que sea mayor que $t_{(\frac{\alpha}{2}, n-2)}$ en valor absoluto es prueba que hay una relación lineal significativa entre x y y [43].

Regresión múltiple

Se utiliza cuando se requiere más de una variable independiente para predecir y . R^2 se define como el porcentaje de variación en y explicado por las variables independientes rechace $H_0 = 0$ en el nivel de significancia α si $(t \text{ para } x_i) \geq t_{(\frac{\alpha}{2}, n-k-1)}$, donde k es el número de variables independientes que se utilizan para predecir y .

Si hay una fuerte relación lineal entre dos o más variables independientes, entonces $\hat{\beta}_i$ podría ser una estimación poco confiable para β_i . En estos casos, decimos que existe multicolinealidad.

Si se cree que una variable independiente no cuantitativa, como el día de la semana o el mes del año, influye en una variable dependiente, se podrían usar variables ficticias para modelar el efecto de la variable independiente cualitativa sobre la variable dependiente. Si la variable es capaz de asumir c valores, se utiliza sólo $c - 1$ variables ficticias [43].

Generalización

Suponiendo que se usan k variables independientes para predecir la variable dependiente y y hay n puntos dato de la forma $(y_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki})$ donde x_{ji} = valor de la i -ésima variable independiente para el i -ésimo punto dato y y = valor de la variable dependiente para el i -ésimo punto dato. La relación entre y y las k variables independientes se modela mediante la siguiente expresión en la regresión múltiple.

$$y_i = \theta_0 + \theta_1 x_{1i} + \theta_2 x_{2i} + \dots + \theta_k x_{ki} + \varepsilon_i$$

Donde ε_i es un término de error con media 0, que representa el hecho de que el valor real de y_i podría no ser igual a $\theta_0 + \theta_1 x_{1i} + \theta_2 x_{2i} + \dots + \theta_k x_{ki}$.

3.2 Series de Tiempo y Pronóstico

3.2.1 Movimiento Geométrico Browniano

El movimiento Browniano, fue descubierto en 1827 por el botánico Robert Brown, mediante observaciones con microscopio, observó el movimiento de pequeñas partículas

de polen en el agua, movimiento descrito como regular e incesante, asemejando a seres vivientes, demostró también que no tenían nada relacionado con formas de vida al extraer de la tierra un pedazo de cuarzo con agua atrapada dentro, probablemente por miles de años y ver el mismo movimiento en su interior, como resultado de la colisión con moléculas moviéndose velozmente en el fluido [44].

El movimiento Browniano es un proceso estocástico que asemeja el movimiento de partículas de polen sobre una superficie acuosa, dicho de otra manera, dada una posición en el momento i , la partícula se puede mover con una probabilidad p , hacia alguna dirección. Retomando lo propuesto por Pérez Fernández [45], se emplea el modelo siguiente con la ecuación diferencial estocástica tipo Itô, para la definición del mGB:

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \\ S(0) = s_0, \end{cases}$$

Dónde:

- $S(t)$ es el valor del activo en el instante t .
- s_0 representa el valor del activo en el instante inicial $t=0$ y se supone conocido, por ello se denota en minúsculas
- $\mu \in \mathbb{R}$ es un parámetro del modelo denominado drift o tendencia.
- $\sigma > 0$ es un parámetro del modelo denominado volatilidad local.
- $B(t)$ es un proceso estocástico de Wiener o movimiento Browniano.

En la práctica, el valor de un activo depende de numerosos factores económicos, políticos, entre otros, que influyen en los mercados financieros. Estos factores pueden contener una elevada incertidumbre dada la complejidad de su determinación.

Considerando el grado de incertidumbre dado en el mercado financiero, es más apropiado introducir la aleatoriedad en el modelo determinista a la hora de modelizar un activo. El parámetro μ pasa a ser una cantidad aleatoria en lugar de una cantidad determinada. La aleatoriedad en el modelo se introducirá mediante el Movimiento Browniano $B(t)$, más concretamente, en su derivada o diferencial, el denominado proceso de Ruido Blanco $dB(t)$. Todo ello motiva la siguiente expresión estocástica del parámetro “ μ ”:

$$\mu \rightarrow \mu + \sigma B'(t), \sigma > 0$$

En la expresión anterior se sigue denotando al parámetro μ como el rendimiento medio del activo, pero en este caso, se le han añadido fluctuaciones aleatorias, siendo $B'(t)$ el proceso estocástico Ruido Blanco y $\sigma > 0$ su intensidad.

La solución del proceso estocástico queda como sigue:

$$S(t) = s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)}$$

llamado movimiento Browniano Geométrico del Modelo Log-Normal[45].

3.2.2 Nuevos paradigmas

En años recientes se ha visto un aumento en artículos de investigación, donde proponen no solo el uso o adaptación de modelos de pronóstico de series de tiempo para problemas actuales, también se proponen la combinación en dos fases o más, de estos modelos, en su mayoría presentan el uso de ARMA seguido del algoritmo GARCH [46]–[51], además también se usa en conjunto ARMA-SVR [19], también se presentan otros algoritmos bioinspirados [22], y otros que utilizan también el principio del movimiento Browniano [21], [52], demuestran una mejoría en la precisión del pronóstico comparado con el uso de un solo algoritmo convencional.

3.3 Optimización y Pronóstico

3.3.1 Antecedentes

Uno de los problemas que surgen al implementar un modelo de pronóstico, ya sea MGB, ARMA, u otros modelos para pronóstico de series de tiempo, es la selección de parámetros con los que se obtienen los mejores resultados, en trabajos recientes encontrados en la literatura, se presenta el uso de técnicas heurísticas para la búsqueda de los mejores valores en sus parámetros, en la mayoría se utilizan Algoritmos Genéticos [26]–[28], [53]. En el presente trabajo se presenta el uso de técnicas heurísticas, para obtener los parámetros de un MGB aplicado para el pronóstico de valores de acciones de la BMV.

3.3.2 Optimización

En la actualidad el ser humano se encuentra sumergido en un ecosistema hiperconectado y global [54] lo que le permite la rápida generación, difusión y análisis de información, a esto se le denomina sociedad del conocimiento. Lo que es un medio propicio para las innovaciones tecnológicas y científicas.

Los miembros de la sociedad actual poseen la capacidad de obtener y compartir cualquier información, instantáneamente, desde cualquier lugar y en la forma que se prefiera. Por ende en esta sociedad la creación, modificación y distribución de la información forma parte esencial de casi cualquier tipo de actividad.

La posibilidad de acceder a una gran cantidad de información sobre cualquier tema conlleva el reto de transformar dicha información en conocimiento, como menciona Juárez y Ponce [55], en la sociedad actual el conocimiento es uno de los principales valores que poseen las personas. Para la construcción de conocimiento el ser humano emplea tanto su razonamiento (construcción *a priori* o proceso representativo), experiencia (construcción *a posteriori* o proceso constructivista) y creatividad

considerando su entorno sociocultural y tecnológico. En la Figura 3 se esquematiza el proceso para la creación de conocimiento.

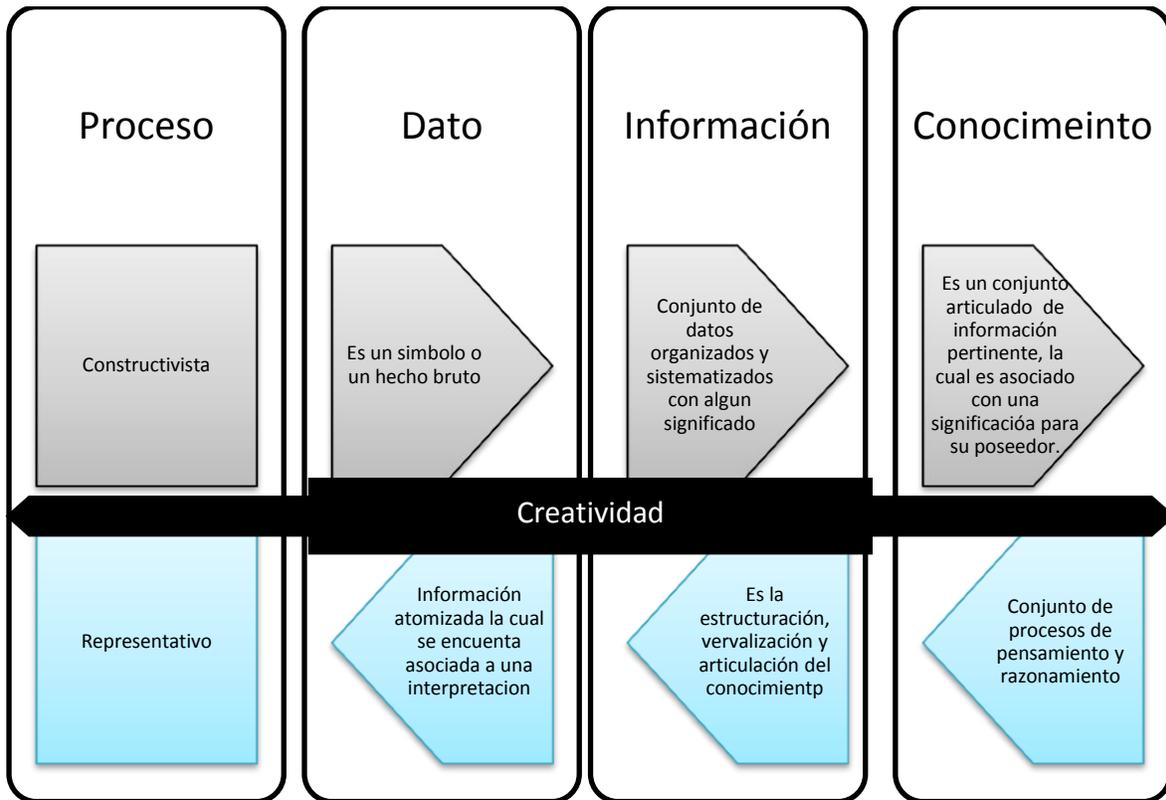


Figura 3. Proceso para la construcción de conocimiento.

La gran cantidad de información involucra la integración y empleo de estrategias y métodos para la generación de conocimiento como una aptitud primordial de los tomadores de decisiones; ya que de lo contrario se corre el riesgo de saturación, banalidad, irrelevancia, pérdida de tiempo, etc.

La producción y procesos para la generación de conocimiento han sido objeto de amplios estudios [56]–[58]. Lo anterior ha conllevado a lo que se ha denominado la cuarta revolución industrial.

Filtrado de información

Una estrategia empleada con objeto de manejar y analizar información es el uso de sistemas de filtrado. En términos generales, se define el filtrado de información como una actividad que conlleva la selección y análisis de información con base en las necesidades. De acuerdo con Quiroga [59], un sistema de filtrado es una herramienta inteligente, la cual tiene el propósito de valorar, seleccionar y entregar información adecuada, precisa y pertinente que corresponda a las necesidades de un usuario.

Una forma de procesar y reducir el tamaño de un conjunto de información se conoce como Análisis de Componentes Principales (PCA, por sus siglas en inglés). Como menciona

Ian Jolliffe [60], cuando se confronta con un conjunto de datos muy extenso, el instinto natural nos incita a intentar reducir su tamaño, mientras se minimiza cualquier pérdida de información, para obtener mejor entendimiento e interpretar la estructura de los datos. Indica que, una estrategia alternativa, sería construir nuevas variables a partir de las originales, este enfoque parece menos intuitivo, pero tiene la ventaja que, por la misma cantidad de información perdida, podemos obtener mayores reducciones del conjunto de datos. PCA fue originalmente propuesto con un enfoque meramente estadístico por Pearson [61], la referencia más actual y recomendada se encuentra en la segunda edición del libro de Jolliffe [62].

En el diseño y desarrollo de un sistema de filtrado se encuentra inmerso el siguiente problema de optimización: $\max(z) \sum_{i=1}^{|C|} \sum_{j=1}^{|S|} u_{ij} x_{ij}$; donde: x_{ij} es uno si el j –ésimo ítem es usado por el i –ésimo usuario y x_{ij} es cero en cualquier otro caso. u_{ij} , una función de utilidad del j –ésimo ítem para el i –ésimo usuario tal que $u: C \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$. C , es un conjunto de usuarios y S un conjunto de posibles *ítems*.

En el diseño de sistemas de filtrado se han empleado árboles de decisión, máquinas de soporte vectorial, redes neuronales, redes bayesianas, discriminantes lineales, regresión logística, entre otros.

Modelo

Un “modelo” es una representación o abstracción selectiva (cuantitativa o cualitativa) de las características de un sistema. Todo problema de optimización debe ser formulado a través de un “modelo matemático” de modo conciso y sin ambigüedades. Estos deben poseer:

- Alternativas o variables de decisión: Son n decisiones cuantificables, cuyo valor afecta el desempeño del sistema.
- Restricciones: Representan un conjunto de m relaciones o condiciones (expresadas como ecuaciones e inecuaciones) que un subconjunto de variables están obligadas a satisfacer.
- Función objetivo o funciones objetivo: Es una medida cuantitativa sobre la calidad de las soluciones de un problema. Se expresa como una función matemática de las variables de decisión.

En un modelo multiobjetivo, como en nuestro caso, se plantean un conjunto de funciones objetivos (dos o más) en conflicto entre sí. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} &\min f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x) \\ &\text{sujeto a:} \\ &g(x) \geq 0 \text{ para todo } j = 1, \dots, p \\ &h(x) = 0 \text{ para todo } j = p + 1, \dots, m \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0$$

$$x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times m}, b \in \mathbb{R}^n$$

Como se menciona en [63], en optimización multiobjetivo, el término optimizar cambia con respecto a la optimización monoobjetivo (global), porque se trata de encontrar un ajuste entre las distintas funciones objetivo en lugar de una sola solución como en optimización global.

Modelo multiobjetivo para la determinación de predictoras

El modelo para determinar las variables predictoras se formuló como se presenta a continuación, se debe destacar que el modelo aunque retoma ideas, se estructura como parte de la metodología siendo una aportación del autor.

$$\min z_1 = \sum_{i=1}^N w_i$$

$$\min z_2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{N}$$

$$\min z_3 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \beta_{ij} * w_i * w_j$$

$$\min z_4 = - \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

Sujeto a:

$$w_i = \begin{cases} 1, & \text{si la } x_i \text{ variable es seleccionada como predictora} \\ 0, & \text{si la } x_i \text{ variable NO es seleccionada como predictora} \end{cases}$$

$$g(x, w) = \hat{y}_i$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si la } x_i \text{ variable es estadísticamente similar a } x_j \\ -1, & \text{si la } x_i \text{ variable NO es estadísticamente similar a } x_j \end{cases}$$

$$\alpha_i = \begin{cases} \text{absoluto}(\text{correlación}(y_i, x_i)), & w_i = 1 \\ 0 & , \quad w_i = 0 \end{cases}$$

Dónde:

$g(x, w)$ es una función de x y w que estiman a y .

Se considera que la x_i es estadísticamente similar a x_j si:

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 0, & \bar{x}_i - \bar{x}_j = 0 \text{ y } s_{x_i}^2 - s_{x_j}^2 = 0 \\ -1, & \bar{x}_i - \bar{x}_j \neq 0 \text{ o } s_{x_i}^2 - s_{x_j}^2 \neq 0 \end{cases}$$

En este trabajo al hablar de dos variables estadísticamente similares se refiere a aquellas con al menos un 95% de similitud.

En este trabajo, también se considera que se desea encontrar una función $f(x) = \hat{y}$, tal que el error producido entre la y (*real*) y la \hat{y} (pronosticada), sea mínimo, tanto para el periodo de entrenamiento como para el periodo que se desea pronosticar.

Cabe mencionar que determinar o encontrar un conjunto de funciones que cumplan estas características es un problema NP-duro, tal como se muestra en [64], [65], por lo cual no existe un método exacto que lo pueda resolver en tiempo polinomial.

Dado un conjunto n de objetos. Sea $x = \{x_1, x_1, \dots, x_m\}$ el conjunto de las observaciones de m variables explicativas. Sea y una variable a explicar. Sea $y = f(x, \theta) + \varepsilon$, una relación funcional entre x e y ; donde $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p\}$ es el conjunto de parámetros y ε es un término del error. Sea $S(\theta)$ es un criterio que mide la diferencia entre y y $f(x, \theta)$. Sea D el espacio de búsqueda.

Entonces, el problema de selección de parámetros en modelos de regresión se determina por una tupla $(\theta, x, y, f(x, \theta), S(\theta), \varepsilon, n, m)$ una solución de este problema involucra encontrar una configuración θ , tal que:

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in D} S(\theta)$$

3.3.2.1 Técnicas Heurísticas

Una metaheurística es un procedimiento flexible e inteligente para generar buenas soluciones a un problema con un consumo razonable de recursos. Las soluciones generadas por estos procedimientos no son necesariamente óptimas. A continuación, se describen qué son las metaheurísticas de algoritmos genéticos y búsqueda armónica, las cuales serán empleadas en este trabajo.

Búsqueda Armónica

Propuesta en 2001 por Geem [31], en este algoritmo se adaptan los conceptos de creación musical en optimización. Las soluciones formuladas son llamadas “armonías” y, cada valor de la misma se llama acorde, se inicializa la memoria de armonías, seleccionando aleatoriamente los valores de las soluciones y se calcula su función objetivo, enseguida se improvisa una nueva solución tomando en consideración la memoria, si esta nueva solución “improvisada” es mejor que la peor en la memoria, se sustituye y se repite el proceso hasta el criterio de paro. Se debe recordar que se utilizan tres operaciones básicas las cuales son: recordar, adaptar e improvisar. Para mayor información se puede consultar: [31], [66].

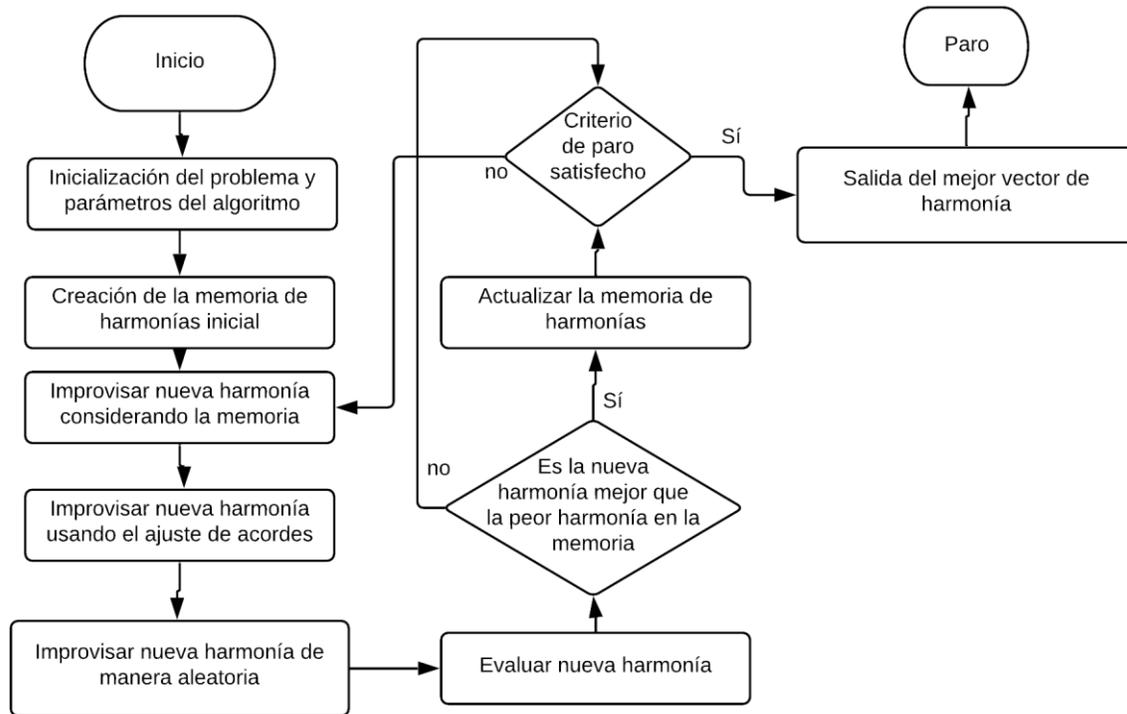


Figura 4. Diagrama de flujo de Búsqueda armónica

Algoritmos Genéticos

Son un enfoque de optimización evolutiva basado en algoritmos de búsqueda aleatoria, desarrollado por John Holland en 1975 [67], es un método muy popular debido a su robustez para la solución de problemas complejos y no lineales. Tiene numerosas ventajas sobre otros métodos clásicos, ya que pueden converger fácilmente a una buena, o bien, a la mejor solución más rápido que otros. Se utilizan operadores genéticos, como selección, mutación y cruza para obtener soluciones. Los pasos básicos son: a) el algoritmo inicializa una población de posibles soluciones; b) se aplican los operadores genéticos; c) se evalúa la función para cada individuo; d) se eliminan, ocasionalmente las malas soluciones de la población; e) una nueva población es creada de nuevo utilizando los operadores, este proceso se repite hasta llegar a un criterio de paro.

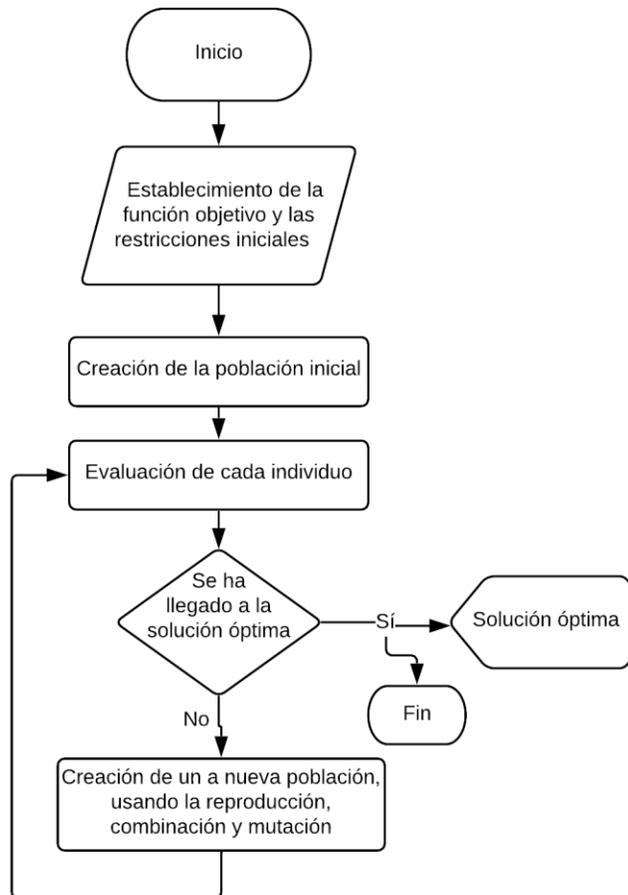


Figura 5. Diagrama de flujo de Algoritmo Genético

3.4 Medidas de desempeño de algoritmos multiobjetivo

En los inicios de la optimización multiobjetivo usando cómputo evolutivo eran comunes las comparaciones visuales entre los frentes de Pareto obtenidos por dos algoritmos distintos. Sin embargo, para realmente lograr una comparación objetiva es necesario definir una medida cuantitativa de la calidad de las soluciones obtenidas[68].

Se espera que un conjunto de soluciones se encuentre compuesto únicamente por soluciones mutuamente no comparables; es decir, para cualquier par de soluciones x_1, x_2 no ocurre que $x_1 < x_2$ ni $x_2 < x_1$. A este tipo de conjuntos se les llama aproximación del conjunto de Pareto y a su imagen bajo la función objetivo se le conoce como aproximación del frente de Pareto.

Se observa que bajo esta definición un conjunto de aproximación no tiene por qué ser igual al conjunto de Pareto. Encontrar el verdadero conjunto de óptimos Pareto es, en general, un problema difícil por lo que comúnmente solo se obtienen conjuntos de

aproximación. Las soluciones generadas por un buen algoritmo de optimización deben cumplir dos objetivos:

- Encontrarse lo más cerca posible del verdadero frente de Pareto
- Tener una buena distribución sobre el frente de Pareto

Las medidas de desempeño disponibles para comparar algoritmos multiobjetivo miden la calidad de las soluciones de acuerdo a estos dos aspectos.

Un indicador de calidad es una función $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna un valor real a un conjunto de aproximación del frente de Pareto.

Un indicador debe definir un orden total en los conjuntos de aproximación del frente de Pareto. Si tenemos dos conjuntos de aproximación A, B tales que $I(A) > I(B)$ entonces el conjunto A es preferible sobre B .

Un indicador particular considera aceptable un conjunto de aproximación bajo criterios específicos considerados en su diseño. Es por esto que puede ocurrir que $I(A) > I(B)$ utilizando algún indicador pero $I'(B) > I'(A)$ bajo un indicador distinto.

3.4.1 Hipervolumen

Este indicador fue propuesto por Zitzler y Thiele [69]. Consiste en la medida de la región dominada por el conjunto de aproximación y acotada por un punto de referencia $\vec{r} \in \mathbb{R}^k$. Sera denotado por I_H .

Si el conjunto de aproximación A está compuesto por los puntos $A = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i\}$, entonces $I_H(A)$ es igual volumen k -dimensional (área en el caso de dos objetivos, volumen para tres objetivos) de la región formada por la unión de los hiperrectángulos delimitados por cada $\vec{x}_j \in A$ y el punto de referencia \vec{r} [70]. Una particularidad importante de este indicador es que entre todos los posibles conjuntos de aproximación para un problema particular, aquel que maximiza el hipervolumen está compuesto únicamente por puntos Pareto óptimos [71].

3.4.2 Distribución

En un principio se usó para evaluar la distribución de las soluciones NSGA-II, fue propuesto por Deb [72] y para su cálculo se utiliza la siguiente ecuación:

$$I_D(A) = \frac{\sum_{m=1}^k d_m^e + \sum_{i=1}^{|A|} |d_i - d|}{\sum_{m=1}^k d_m^e + |A|d}$$

Donde cada d_i , son las distancias euclidianas entre cada solución y su vecino más cercano; d es el promedio de estas distancias.

Un conjunto de aproximación puede tener una buena distribución pero no cubrir por completo el frente de Pareto. A manera de penalizar este caso los parámetros d_m^e son la distancia entre las soluciones extremas del verdadero frente de Pareto y el conjunto de aproximación en cada una de las funciones objetivo.

3.4.3 Distancia generacional inversa

Esta medida de desempeño fue propuesta hace 20 años por Van Veldhuizen y Lamont [73], [74]. Su finalidad es medir qué tan lejos se encuentra el conjunto de aproximación A del verdadero frente de Pareto PF . Se calcula utilizando la siguiente ecuación:

$$I_{DG}(A) = \frac{(\sum_{i=1}^{|A|} d_i^2)^{\frac{1}{2}}}{|A|}$$

Los valores d_i corresponden a la distancia euclidiana entre cada elemento de A y el miembro más cercano en PF .

En este indicador, un conjunto de aproximación A es mejor que otro conjunto B si $I_{DG}(A) < I_{DG}(B)$.

La distancia generacional invertida difiere en que las distancias d_i son medidas desde cada elemento de una discretización P de PF hacia el elemento más cercano en el conjunto de aproximación A :

$$I_{DG}(A) = \frac{(\sum_{i=1}^{|P|} d_i^2)^{\frac{1}{2}}}{|P|}$$

3.4.4 Cobertura de conjuntos

La cobertura de conjuntos fue propuesta en 1999 por Zitzler y Thiele [75]. A diferencia de las medidas de desempeño mencionadas anteriormente, la cobertura de conjuntos es un indicador binario, es decir, es una función $I : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Denotado por I_{CC} , este indicador representa la proporción de soluciones dominadas o iguales entre dos conjuntos de aproximación.

$$I_{CC}(A, B) = \frac{|\{\vec{b} \in B : \exists \vec{a} \in A : \vec{a} < \vec{b} \vee \vec{a} = \vec{b}\}|}{|B|}$$

Si $I_{CC}(A, B) = 1$ entonces todos los elementos de B son dominados por los de A y, por lo tanto, A es preferible sobre B .

Este indicador no es simétrico, es decir, $I_{CC}(A, B)$ puede ser diferente de $I_{CC}(B, A)$ por lo que es necesario considerar ambos casos para comparar dos conjuntos de aproximación.

4. Metodología

4.1 Descripción

El proceso completo que se llevó para la realización de este trabajo se presenta en la Figura 6. Como se mencionó en la sección anterior, la parte de selección de variables es muy importante y conlleva por lo tanto una buena cantidad de trabajo y tiempo, en la Figura 7 se presenta con mayor detalle el proceso del filtrado de datos.

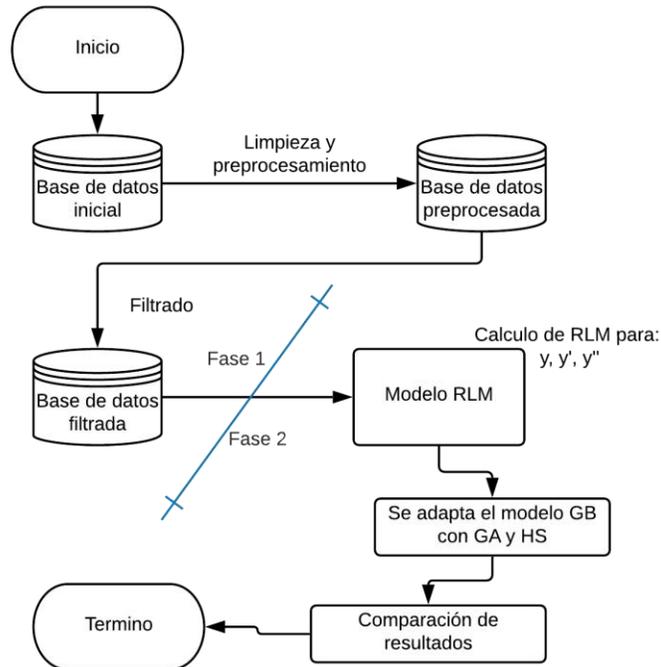


Figura 6. Diagrama general del modelo.

Las bases de datos iniciales son descargadas, cargadas en el sistema, analizadas y depuradas para mayor facilidad de uso y procesamiento (eliminación de valores nulos, cambio de tipo de datos, etc.). La base de datos preprocesada se introduce en el proceso de filtrado de variables para reducir el número de entradas y minimizar el error en un modelo de regresión lineal múltiple (RLM). Una vez obtenida la base de datos filtrada, se formula el Modelo Geométrico Browniano y se adaptan las metaheurísticas para obtener valores óptimos de las variables del modelo. Cabe mencionar que para la primera fase se emplea recocido simulado mientras que para la segunda fase se emplea AG y HS. A continuación se presenta una explicación más detallada de cada parte del proceso completo.

4.1.1 Generación de la base de datos

Para la realización de este trabajo se seleccionaron al azar, con el fin de no sesgar los datos, empresas grandes de distintos sectores que forman parte de la muestra con la que se elabora el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la BMV, el cual es considerado un

mercado financiero emergente[17]. Los archivos de datos históricos se obtuvieron de la plataforma de “Economatica”[1], posteriormente, se depuró con el objeto de eliminar valores faltantes por días sin operación (días festivos), y, para el filtrado de variables. La base de datos depurada, antes de la aplicación de funciones a las mismas, consta de 12 variables, las cuales son, valor de cierre, apertura, valor mínimo, valor máximo, volumen, número de operaciones, promedio, RSI, AccRSI, MACD, Momento a 10 días y Bollinger. El periodo de análisis de la muestra comienza en enero de 2006 y termina en diciembre de 2016 (2765 entradas aproximadamente), fue elegido debido a los eventos recientes ocurridos en México, entre otros: elecciones presidenciales, aumento en índices de violencia, “guerra contra el narcotráfico”, crecimiento de redes sociales, y en el mundo, desde la recesión en 2008, la crisis de deuda de la eurozona en 2011, el Brexit y las elecciones en USA en 2016.

4.1.2 Filtrado de la base de datos

La separación entre las variables predictoras y la que se va a predecir obedecen al interés mostrado en otros trabajos. Debe mencionarse que solo para las variables predictoras, se realizó lo siguiente, y que se muestra en la Figura 7:

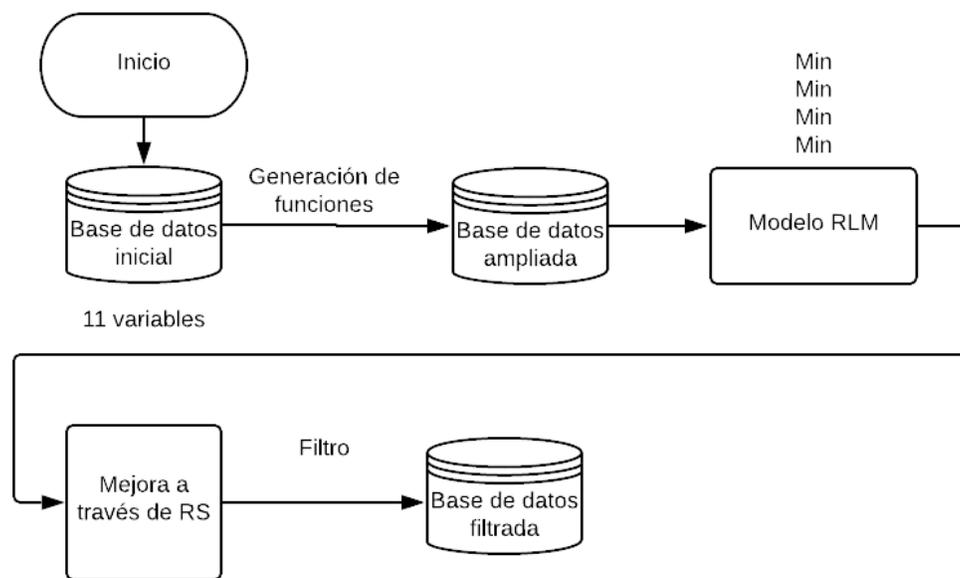


Figura 7. Diagrama del Filtrado de variables

La base de datos original, inicialmente de 11 variables, se amplía aplicando 12 funciones sobre el conjunto de variables independientes originales, las cuales son:

X^2	El valor de X elevado al cuadrado
X^3	El valor de X elevado al cubo
$\begin{cases} \log(X), & X \neq 0 \\ 0, & X = 0 \end{cases}$	Logaritmo del valor absoluto de X, para X distinto de cero
X^{-1}	El valor de X elevado a la menos 1
X^{-2}	El valor de X elevado a la menos 2
X^{-3}	El valor de X elevado a la menos 3
$X_i X_j \{i \neq j\}$	El producto de $X_i X_j$, siempre que i no sea igual a j
$\sin X$	El seno del valor de X
$\cos X$	El coseno del valor de X
$ \sqrt{X} $	El valor absoluto de la raíz cuadrada de X
$\begin{cases} \frac{1}{X}, & X \neq 0 \\ 0, & X = 0 \end{cases}$	El cociente de 1 sobre el valor de X, para X distinto de cero
$\begin{cases} \frac{1}{\log X }, & \log X \neq 0 \\ 0, & X = 0 \end{cases}$	El cociente de 1 sobre el valor del logaritmo del valor absoluto de X, siempre que el logaritmo del valor absoluto de X sea distinto de cero
$\begin{cases} \frac{1}{1 - e^{- X }}, & 1 - e^{- X } \neq 0 \\ 0, & 1 - e^{- X } X = 0 \end{cases}$	El cociente de 1 sobre 1 menos la constante e elevado a la menos el valor absoluto de X, siempre que 1 menos la constante e elevado a la menos el valor absoluto de X sea distinto de cero

La ampliación de la base genera relaciones no lineales de las variables independientes con lo cual se tiene un espectro mayor de las relaciones entre independientes y dependientes. La reducción permite emplear sólo las variables y relaciones necesarias y para explicar el comportamiento de la variable dependiente.

Se cuenta ahora con 132 variables para determinar el valor de cierre de las acciones de un conjunto de 12 empresas mexicanas que cotizan en la BMV (Bolsa Mexicana de Valores), el modelo es llevado a cumplir los siguientes objetivos.

El modelo descrito en la sección anterior se adecua con el objeto de poder trabajar el conjunto de datos de entrenamiento y los datos a predecir. Debe mencionarse que la suma del cuadrado de los errores es una métrica entre el valor real y el valor estimado.

El conjunto de datos empleado en este trabajo para la calibración del modelo se dividió en dos grupos un conjunto de entrenamiento y conjunto de prueba, ambos tomados a partir del histórico.

$$\text{Max } Z_1 = |\text{Corr}|$$

$$\text{Min } Z_2 = \frac{\text{SSE}_a}{N_a}$$

$$\text{Min } Z_3 = \frac{\text{SSE}_p}{N_p}$$

$$\text{Min } Z_4 = \sum_{i=1}^k X_i$$

$$\text{Min } Z_5 = \beta_{ij}$$

Donde, $|\text{Corr}|$ es el valor absoluto del coeficiente de correlación lineal entre la variable dependiente con las independientes, SSE es el error cuadrático, N el número de datos, a es el conjunto de entrenamiento, p se refiere al conjunto de prueba, x_i es igual a 1 si se usa la i variable o 0 en otro caso, y k es el número total de variables. β_{ij} determina si una variable empleada i ya brinda la misma información que otra variable j .

Dado que es un modelo de regresión múltiple, se considera la ecuación siguiente:

$$\hat{y}_{t+1} = \theta_0 + \theta_1 X_{1t} + \theta_2 X_{2t} + \dots + \theta_k X_{kt} + \varepsilon$$

El filtrado de variables se realiza de la siguiente manera, dadas k variables, para cada X_i , no se puede emplear en el modelo si y solo si:

$$\bar{X}_i = \bar{y}$$

El promedio de la variable X_i es igual al promedio de y' , y ,

$$\delta_{X_i}^2 = \delta_{y'}^2$$

la varianza de X_i es igual a la varianza de y' .

- X_r sea el conjunto de variables obtenidas al eliminar de X aquellas variables que sean estadísticamente similares a y , además aquellas cuyo coeficiente de correlación $(x_i, y) = 0$, se registra para aquellas variables no eliminadas el coeficiente de correlación con y .
- Se calcula para todo par de variables en X_r si son estadísticamente similares.
- $m1$ sea el modelo de regresión lineal múltiple $g(X_r) \rightarrow y$.
- Se evalúa el modelo generado con base en el modelo multiobjetivo.
- Se determina un conjunto de parámetros para la ejecución del Recocido Simulado multiobjetivo (p sea el número de puntos en el frente de Pareto, T_i temperatura inicial, T_f temperatura final criterio geométrico de descenso de temperatura, k número de ejecuciones antes del descenso de temperatura).

- Se genera un conjunto de $2p$ soluciones iniciales con base en la información de m_1 .
- Se evalúan las soluciones encontradas.
- Sea A el conjunto de p soluciones iniciales aquellas que se toman al considerar criterio de no dominancia y el criterio de suma ponderada.

A continuación, se presenta el pseudocódigo del algoritmo de recocido simulado para el filtrado; este algoritmo fue modificado tal que una solución está integrada por k variables independientes sobre las cuales se aplica una regresión lineal múltiple con el objeto de determinar la calidad en el pronóstico generado a partir de la k -ésima solución; ya que se emplea un modelo multiobjetivo, la calidad de las soluciones se evalúa en términos de dominancia generando por ende un conjunto de p soluciones:

Entrada Un conjunto expandido de variables predictoras

$T_a = T_i$

MIENTRAS $T_a > T_f$

PARA $i = 1: k$

PARA $j = 1: p$

S_i i -ésima solución en A

S_n sea una solución generada con búsqueda local

SI S_n es mejor que S_i , entonces S_i en A es remplazado por S_n

SI NO se determina el criterio de metrópolis posteriormente se emplea éste para decidir si S_i en A es remplazado por S_n .

B_j sea la solución desechada

FIN PARA

$T_a = \alpha * T_a$

$C = A \cup B$

A son las p mejores soluciones de C

$B = []$

FIN PARA

SALIDA Subconjunto de X_r de variables predictoras

Algoritmo 1. Pseudocódigo de Recocido Simulado empleado

4.1.3 Adaptación de Heurísticas

Una vez obtenido el conjunto de variables, se inicializa un Modelo Geométrico Browniano (MGB) de manera aleatoria, se realiza una prueba del mismo y se procede a implementar las metaheurísticas descritas anteriormente, adaptadas ahora para la búsqueda de mejores parámetros del MGB, a continuación, se describen las modificaciones a las mismas para su implementación.

Algoritmos genéticos

Se aplicó el algoritmo genético básico, con una población de 10 individuos, se debe mencionar que los valores de los parámetros se establecieron a partir de una calibración de prueba y error. Cada cromosoma se representó por una cadena de números reales compuesta por tres constantes a encontrar (a_1, a_2, a_3), la media del error (μ_{error}), la varianza del error sobre y calculada (S_{error}), funciones objetivo 1 y 2 (O_1, O_2), la función objetivo 1 (O_1) es el error estándar promedio sobre el conjunto de aprendizaje, y la función objetivo 2 (O_2) es el error estándar promedio sobre el conjunto de prueba. En la Figura 8 se muestra un esquema de la representación del individuo.

a_1	a_2	a_3	μ_{error}	S_{error}	O_1	O_2
-------	-------	-------	---------------	-------------	-------	-------

Figura 8. Representación del individuo en el algoritmo básico. Fuente: Elaboración propia

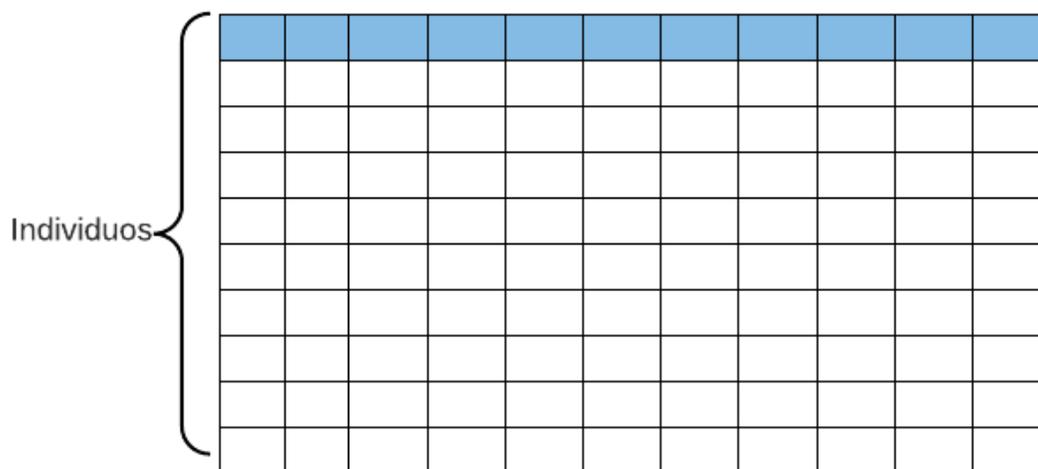


Figura 9. Ejemplo de representación de población de individuos

La creación de la población inicial es aleatoria (a_1, a_2, a_3 , numeros aleatorios normalmente distribuidos), la selección de padres se realiza mediante torneo binario. Una vez que se obtiene la pareja de padres, se realiza la cruce para obtener un hijo, la cruce se realiza en dos puntos seleccionados de manera aleatoria del cromosoma, se transfiere la información genética al hijo y se almacena en la población de hijos (diez individuos).

Con los nuevos hijos se genera la corrida de mutación, con una probabilidad de 15% con los hijos elegidos, se selecciona un "gen" a mutar (a_1, a_2 o a_3). A continuación se unen la población anterior con los hijos y se ordenan por aptitud, se selecciona la mejor mitad y

esta se convierte en la nueva generación. El proceso se repite hasta que se cumple el criterio de paro, en nuestro caso, al llegar a las dos mil generaciones procesadas.

Búsqueda Armónica

Se aplicó el algoritmo de Búsqueda Armónica (HS), el cual contó con una memoria de armonías de diez elementos, una tasa de ajuste de tono de 10%, una tasa de consideración de armonía de 70%, un máximo número de iteraciones de dos mil, y su información fue representada en cadenas de números reales, la primera sección, representando la parte a buscar y el resto, variables calculadas con los primeros tres valores de la armonía, del MGB. Estas armonías se almacenaron en una matriz para su manipulación.

Cada armonía está igualmente compuesta que los individuos del AG. En la creación de la memoria de armonías aleatoriamente, se llena su información con los valores acotados en los que deben estar los parámetros, un número aleatorio de una distribución normal. Posteriormente se improvisa una nueva memoria de armonías considerando la actual, ajustes de acordes (constantes a buscar) y aleatoriedad. El algoritmo que se emplea para la creación de una nueva memoria de armonías se presenta en el Algoritmo 2.

Crea una memoria armónica inicial

MIENTRAS criterio de paro no satisfecho

PARA j=1: HM

PARA k=1: 3

SI rand < (1-PAR)

 selection = una armonía aleatoria

 sol_nueva(j,k) = memoria_h(selection,k)

SI rand < HCR

 s1 = raíz(varianza(memoria_h(:,k)))

SI s1==0

 s1=1

FIN SI

 sol_nueva(j,k) = sol_nueva(j,k) + randn*(s1)

FIN SI

OTRO

 apar1=mínimo(memoria_h(:,k))

 apar2=máximo(memoria_h(:,k))

MIENTRAS apar2==apar1

 apar2=apar2+randn

FIN MIENTRAS

 sol_nueva(j,k) = apar1+randn*(apar2-apar1)

FIN SI

FIN PARA

sol_nueva(j,4) = Calcular media del error
sol_nueva(j,5) = Calcular varianza del error
sol_nueva(j,6) = Calcular Objetivo 1
sol_nueva(j,7) = Calcular Objetivo 2

FIN PARA

Determinar el conjunto de soluciones no dominadas

FIN MIENTRAS

Algoritmo 2. Sección del algoritmo de Búsqueda Armónica para creación de nueva memoria de armonías. Fuente: Elaboración propia

Una vez llegado a este punto del proceso, se unen las memorias, la nueva improvisada y la anterior, y se ordenan por mejores resultados de los objetivos ponderados, se selecciona la mejor mitad y se almacena como la memoria de armonías inicial para la siguiente iteración. Este proceso se repite hasta llegar al criterio de paro, en nuestro caso, al llegar a las dos mil generaciones procesadas. Se emplea el criterio de no dominancia y suma ponderada.

Se evalúan ambos métodos usados por índices de calidad o desempeño, los cuales son: hipervolumen, distribución, distancia generacional invertida y cobertura de conjuntos.

4.1.4 Implementación con un Modelo Geométrico Browniano

Una vez obtenido la base de datos filtrada, se inicializa el Modelo Geométrico Browniano, y se adaptan las metaheurísticas de AG y HS para la búsqueda de valores óptimos de los mejores parámetros del modelo predictivo.

La función del MGB para la predicción de \hat{y} (precio de la acción) es la siguiente:

$$\hat{y} = a_1y + e^{a_2y' + a_3y'' + \mu_{error} + \sqrt{t} \times S_{error} \times \alpha}$$

Donde:

- a_i con $i = 1,2,3$, son constantes a encontrar,
- y es el resultado del cálculo con Regresión Lineal Múltiple obtenida con el filtrado ($f(x)$, en primera fase),
- y' es la primera derivada de y calculada ($f(x')$) respecto al tiempo, acorde a su definición, la razón de cambio con el valor inmediato anterior,
- y'' es la segunda derivada de y calculada ($f(x'')$) respecto al tiempo, de igual manera, la segunda diferencia con su valor inmediato anterior,
- μ_{error} es la media del error,
- t es el tiempo transcurrido,
- S_{error} es la varianza del error sobre y calculada,
- α es un aleatorio normalmente distribuido ($\alpha \sim N(0,1)$).

En este modelo, se agrega ruido blanco en función del tiempo en la fórmula $(\sqrt{t} \times S_{error} \times \alpha)$, esto para intentar reducir el error producido en el pronóstico del precio. Las derivadas mencionadas son respecto al tiempo.

4.2 Experimentación

Una vez obtenidas las bases de datos de la plataforma especializada, se guardaron en formato .CSV (archivo separados por comas, por sus siglas en inglés), se realizaron cambios a formatos de número de los datos y se removieron los títulos de las columnas, se almacenaron en formato .TXT (archivo de texto) para facilitar la manipulación en MATLAB.

Para realizar el filtrado de variables, se procesó cada caso en la base de datos en MATLAB, esto se realizó en la versión r2014b, en una computadora iMac Retina 5K, con un procesador Intel Core i5 3.2 GHz y memoria 8GB 1867 MHz DDR3, el análisis de una instancia implicó la ejecución de 20 corridas del algoritmo con un promedio de 8 horas cada una. Al final de cada ejecución, se obtuvieron las gráficas mostradas en el **Anexo 1**, al igual que tablas de información que será utilizada en la segunda parte del modelo.

La siguiente parte del modelo se ejecutó, también, en MATLAB la implementación de dos metaheurísticas para la obtención de los parámetros del MGB, ambas implementaciones se probaron 20 veces y se guardaron los resultados, tuvieron un tiempo de ejecución por cada acción de 2 a 3 horas por técnica heurística implementada.

Con las soluciones generadas por cada método, se analizaron las medidas de desempeño y los frentes de Pareto para ambas técnicas heurísticas, las gráficas de los frentes de Pareto se encuentran en el **Anexo 2**. Con las gráficas recolectadas y los resultados obtenidos se realiza su análisis en las siguientes secciones. Se menciona que este modelo se diseñó para predicciones a corto plazo (1 día), y con base a esto se evaluó.

5. Resultados experimentales

Como fue mencionado anteriormente, el filtrado es una herramienta que ayuda a reducir el número de variables necesarias y mejora la calidad de los resultados obtenidos, en la Figura 10 y 11, se puede observar la representación de los frentes de Pareto de los cinco objetivos del modelo, descritos en la sección 2, para el pronóstico de la acción de “BI****”, las diagonales muestran las características de los valores del i -ésimo objetivo, en contraste las gráficas de puntos muestran la interacción del i -ésimo objetivo con el j -ésimo objetivo. Se puede apreciar una dispersión considerable en los puntos, y no es posible identificar una curva bien definida en la mayoría de los casos. Después de haber realizado el filtrado de variables, se observa en la Figura 11 cómo la curva de los frentes comienza a verse más claramente en cada caso de comparación, la imagen mostrada corresponde a la acción de “BI****”. Con base en el modelo de filtrado, el objetivo tres, que baja la colinealidad, se busca que dos variables que son colineales no se empleen, los resultados numéricos muestran que podría ser quitado del modelo original sin afectar los resultados del mismo.

Es posible observar esta mejora en el modelo, al comparar las Figuras 12 y 13, en ambas gráficas, el eje “y” corresponde al valor en pesos (\$), el eje “x” son el número de días del periodo de prueba, la línea continua es el valor real de la acción, en este caso expuesto de “BI****”, y los círculos pequeños representan los pronósticos de los modelos generados, en la Figura 12, se muestran los pronósticos del valor de la acción antes del filtrado de datos, y en la Figura 13, los pronósticos después del mismo. Se puede ver un incremento en los modelos generados que reducen la distancia al valor real de la acción a pronosticar.

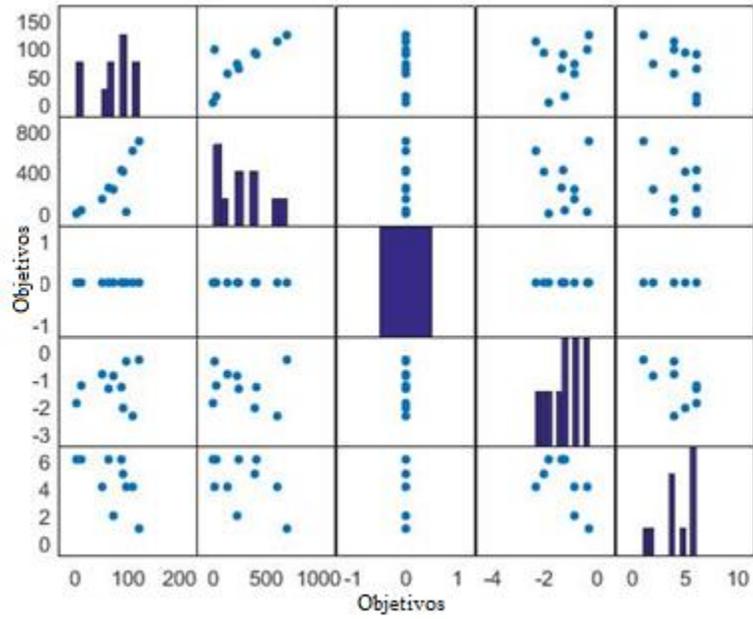


Figura 10. Frentes de Pareto de los objetivos del modelo antes del filtrado de datos.

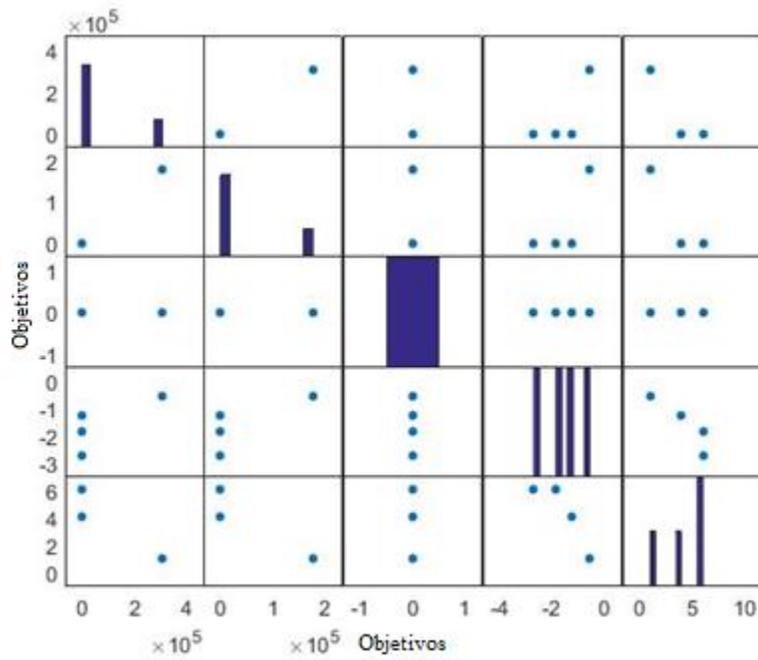


Figura 11. Frentes de Pareto de los objetivos del modelo después del filtrado de variables.

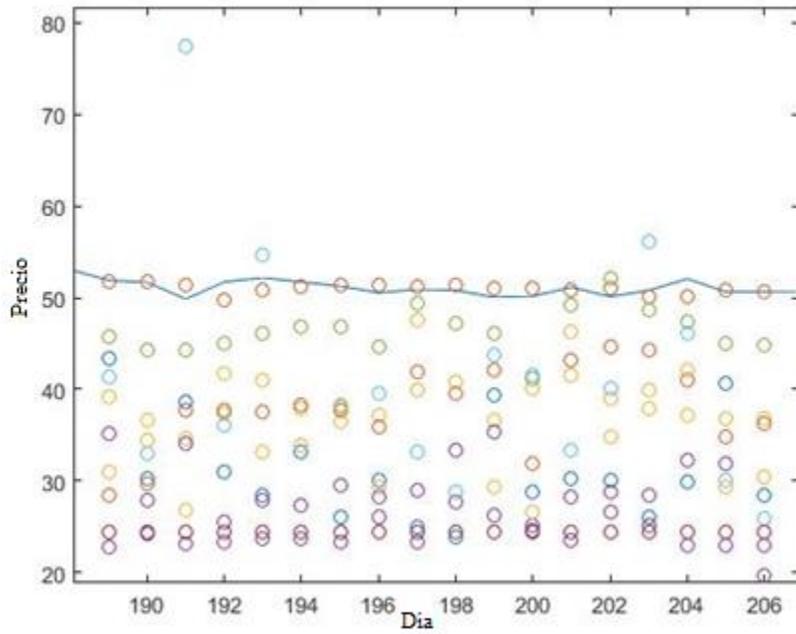


Figura 12. Pronóstico del valor/stock (BI****) antes del filtrado de variables

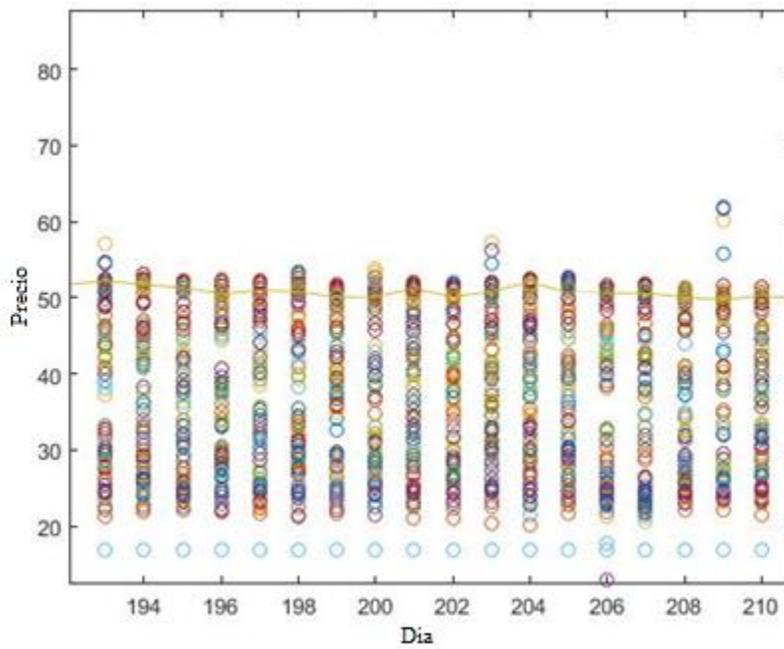


Figura 13. Pronóstico del valor/stock (BI****) después del filtrado de variables

1	10	2	6	7
2	9	2	5	5
3	7	1	4	4
4	7	2	4	4
5	9	2	6	6
6	13	2	5	5
7	7	1	4	4
8	5	1	3	3
9	9	4	6	5
10	9	2	6	6
11	9	2	5	4
12	11	2	6	7

Tabla 2. Tabla comparativa de número de variables a usar en cada acción (*stock*)

Por último, se concentra en la Tabla 2, los resultados del filtrado de variables de las 12 acciones con las que se trabajó, de un total de 132 variables en cada caso, se redujo a estos números, de izquierda a derecha, en la primera columna se presenta el número máximo de variables usadas, del total de variables de la base de datos ampliada, en los modelos creados para cada acción. En la segunda columna, el número mínimo de variables usadas, en la tercer y cuarta columna, el promedio y mediana, respectivamente, de variables usadas en los modelos generados. Se nota una gran disminución del número de variables a emplear, cerca de 12 variables en el peor de los casos y alrededor de 2 a 3 variables en los mejores modelos.

En Tabla 3, se muestran los resultados obtenidos al evaluar las técnicas empleadas para la búsqueda de mejores variables del MGB, de la acción de "BI*****". En la primera métrica (Distribución), se observa una cercanía al Pareto óptimo (valor cercano a 1), mayor en el AG, y en las siguientes métricas, donde se espera obtener un valor cercano a 0, un mejor desempeño por parte del AG, exceptuando el Hipervolumen, estos resultados del desempeño pueden ser mejorados en un trabajo posterior, ajustando el algoritmo de búsqueda usado.

Métrica	Algoritmo	Máximo	Mínimo	Promedio	Mediana	Varianza	Desviación estándar
Distribución	HS	0.89331447	0.73627844	0.81479645	0.81479645	1.23E-02	0.11104125
	AG	0.9375684	0.92663061	0.9320995	0.9320995	5.98E-05	0.00773418
Distancia Generacion al Inversa	HS	0.27314163	0.10430499	0.18872331	0.18872331	0.01425291	0.11938554
	AG	0.1548839	0.07730731	0.1160956	0.1160956	0.00300906	0.05485493
Space	HS	0.34250562	0.296266	0.31938581	0.31938581	0.00106905	0.03269635
	AG	0.2185164	0.03603323	0.12727482	0.12727482	1.67E-02	0.12903508
Hipervolumen	HS	0.39362027	0.31168131	0.35265079	0.35265079	0.003357	0.05793959
	AG	0.47255828	0.33761021	0.40508424	0.40508424	9.11E-03	0.0954227

Tabla 3. Resultados obtenidos al evaluar las técnicas empleadas para la búsqueda de mejores variables del MGB.

A pesar de obtener una capacidad de predicción satisfactoria, y un error aceptable, las técnicas heurísticas usadas pueden ser mejoradas, para así, llegar a obtener valores de predicción más acertados y lograr un mejor resultado en sus métricas de desempeño. En la Tabla 4 se expone, con base en los valores obtenidos en las medidas de desempeño de ambos algoritmos, los resultados resumidos para la búsqueda de parámetros del modelo generado para cada acción, donde 1 representa un buen desempeño, 0 menor que el obtenido, y -1 un mal desempeño.

Acción	BH	AG
AL***	0	1
AM**	1	0
BI****	0	1
CE*****	-1	-1
CO*****	-1	-1
FE*****	-1	-1
GFN*****	-1	-1
GC*****	0	-1
GFI*****	-1	-1
GM*****	-1	-1
TL*****	0	-1
WA****	-1	-1

Tabla 4. Resultados resumidos de las medidas del desempeño de ambos algoritmos.

En las Figuras 14 y 15 se muestran los frentes de Pareto obtenidos del modelo multiobjetivo utilizando AG y HS respectivamente, en las cuales podemos observar los puntos próximos a la curva del frente de Pareto óptimo.

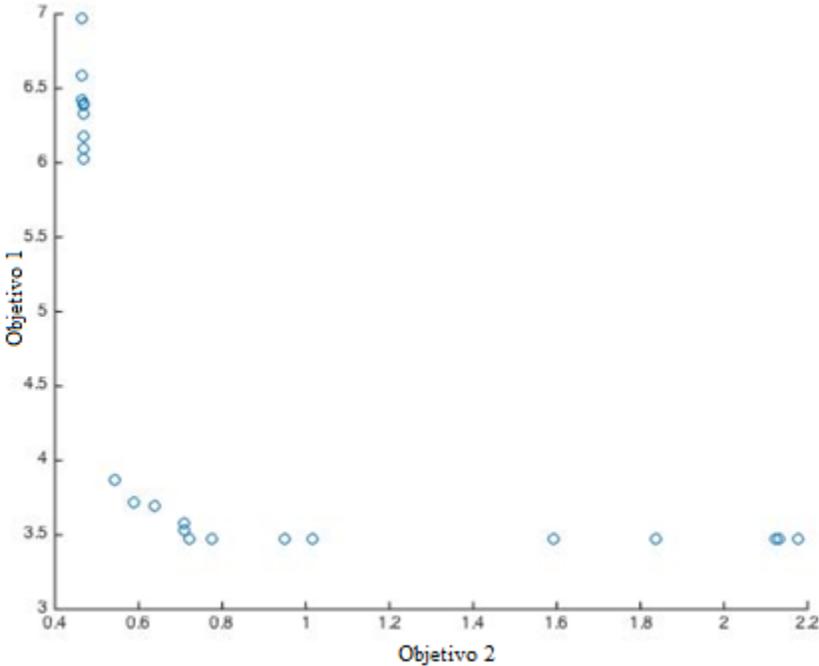


Figura 14. Frente de Pareto del modelo con AG

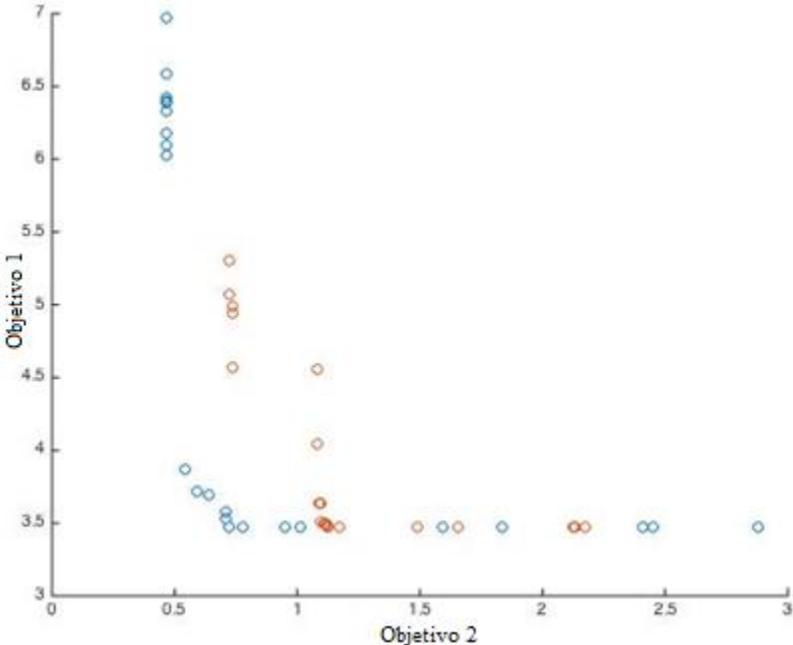


Figura 15. Frente de Pareto del modelo con HS

6. Conclusiones y trabajo futuro

Se optó por identificar a las empresas analizadas a través de sus primeras letras de su símbolo bursátil utilizado en la BMV para evitar complicaciones. La metodología propuesta en este trabajo ha mostrado una alta flexibilidad para el filtrado y pronóstico de datos a partir de la concatenación sinérgica de dos modelos de optimización. Destacando que la primera fase permite identificar el conjunto de variables predictoras importantes reduciendo a 5% las variables de la base de datos ampliada. Por otro lado, el proceso de calibración de los modelos mejora el comportamiento de las funciones de pronóstico generando datos ajustados y cercanos a los reales. Se menciona que este modelo se diseñó para predicciones a corto plazo (1 día), y con base a esto se evaluó.

Se desarrolló un modelo multiobjetivo para la predicción de los precios de las acciones, donde se logró determinar un conjunto pequeño de variables de entrada, maximizar la correlación lineal entre la variable dependiente con las independientes y minimizar el error sobre el conjunto de datos de entrenamiento y de prueba, de los cuales se obtuvo un buen resultado.

En este trabajo se aporta una base de datos del histórico de acciones representativas de la BMV con indicadores técnicos, del periodo comprendido de 2006 a 2016, esta se limpió de valores faltantes y se procesó para poder ser manipulada con mayor facilidad. La base de datos se amplió utilizando funciones, contando al final con 132 variables, las cuales se redujeron a través del proceso de recocido simulado a entre 3 y 9 variables en la mayoría de los casos.

De esta manera se determinaron las variables con mayor influencia para la predicción del precio en cada acción, en el periodo comprendido. Con esta nueva base de datos de variables seleccionadas, se implementó el MGB, para la predicción de precios, con dos metaheurísticas, AG y HS, las cuales tuvieron un buen desempeño en la predicción, de estas dos técnicas, HS obtuvo mejores resultados para la construcción del MGB, y obtiene mejores resultados en la predicción. Se generaron modelos ad hoc para cada una de las acciones analizadas, los resultados de selección para cada una de las variables están disponibles en "<http://bit.ly/396h3J1>".

Como se mostró en las tablas de hipervolumen y distancia generacional invertida, ambas técnicas resultan eficientes para resolver el problema multiobjetivo. Sin embargo, cabe destacar que el mejor comportamiento lo presenta Búsqueda Armónica.

Las áreas de oportunidad para futuros trabajos involucran adaptar los procedimientos de restricciones ϵ con los presentados en este trabajo para mejorar la calidad de los resultados y mejorar el frente de Pareto obtenido.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Economatica, "Economatica.com." [Online]. Available: <https://economatica.com/>. [Accessed: 23-Oct-2019].
- [2] V. Díaz Gandasegui, "Mitos y realidades de las redes sociales. Información y comunicación en la Sociedad de la Información," *Prism. Soc. Rev. ciencias Soc.*, no. 6, pp. 340–366, 2011.
- [3] Y. Kara, M. Acar Boyacioglu, and Ö. K. Baykan, "Predicting direction of stock price index movement using artificial neural networks and support vector machines: The sample of the Istanbul Stock Exchange," *Expert Syst. Appl.*, vol. 38, no. 5, pp. 5311–5319, 2011.
- [4] C. Y. Yeh, C. W. Huang, and S. J. Lee, "A multiple-kernel support vector regression approach for stock market price forecasting," *Expert Syst. Appl.*, vol. 38, no. 3, pp. 2177–2186, 2011.
- [5] B. B. Nair, V. P. Mohandas, and N. R. Sakthivel, "A Decision tree- Rough set Hybrid System for Stock Market Trend Prediction," *Int. J. Comput. Appl.*, vol. 6, no. 9, pp. 1–6, Sep. 2010.
- [6] R. Choudhry and K. Garg, "A Hybrid Machine Learning System for Stock Market Forecasting," *World Acad. Sci. Eng. Technol.*, vol. 2, no. 15, pp. 315–318, 2008.
- [7] J. Patel, S. Shah, P. Thakkar, and K. Kotecha, "Predicting stock market index using fusion of machine learning techniques," *Expert Syst. Appl.*, vol. 42, no. 4, pp. 2162–2172, 2015.
- [8] K. Khare, O. Darekar, P. Gupta, and V. Z. Attar, "Short term stock price prediction using deep learning," in *RTEICT 2017 - 2nd IEEE International Conference on Recent Trends in Electronics, Information and Communication Technology, Proceedings*, 2018, vol. 2018-Janua, pp. 482–486.
- [9] J. Patel, S. Shah, P. Thakkar, and K. Kotecha, "Predicting stock and stock price index movement using Trend Deterministic Data Preparation and machine learning techniques," *Expert Syst. Appl.*, vol. 42, no. 1, pp. 259–268, 2015.
- [10] M. Ballings, D. Van den Poel, N. Hespeels, and R. Gryp, "Evaluating multiple classifiers for stock price direction prediction," *Expert Syst. Appl.*, vol. 42, no. 20, pp. 7046–7056, 2015.
- [11] E. A. Gerlein, M. McGinnity, A. Belatreche, and S. Coleman, "Evaluating machine learning classification for financial trading: An empirical approach," *Expert Syst. Appl.*, vol. 54, pp. 193–207, 2016.
- [12] C.-J. Huang, D.-X. Yang, and Y.-T. Chuang, "Application of wrapper approach and composite classifier to the stock trend prediction," *Expert Syst. Appl.*, vol. 34, no. 4, pp. 2870–2878, 2008.
- [13] A. Chen, M. T. Leung, and H. Daouk, "Application of neural networks to an emerging financial market : forecasting and trading the Taiwan Stock Index," *Comput. Oper. Res.*, vol. 30, pp. 901–923, 2003.
- [14] K. J. Kim, "Financial time series forecasting using support vector machines," *Neurocomputing*, vol. 55, no. 1–2, pp. 307–319, 2003.
- [15] P. Rodriguez and A. Rodriguez, "Predicting stock market indices movements,"

- Comput. Financ. its ...*, no. March, 2004.
- [16] B. Weng, M. A. Ahmed, and F. M. Megahed, "Stock market one-day ahead movement prediction using disparate data sources," *Expert Syst. Appl.*, vol. 79, pp. 153–163, 2017.
 - [17] Comisión Nacional de Vivienda, "La BMV ofrece una gran oportunidad de crecimiento para empresas del sector vivienda," 25-Oct-2016. [Online]. Available: <https://www.gob.mx/conavi/prensa/la-bmv-ofrece-una-gran-oportunidad-de-crecimiento-para-empresas-del-sector-vivienda?idiom=es>.
 - [18] G. E. P. Box and G. M. Jenkins, *Time Series Analysis: forecasting and control*, 1st ed. San Francisco: Holden-Day, 1970.
 - [19] C. Ordóñez, F. Sánchez Lasheras, J. Roca-Pardiñas, and F. J. de C. Juez, "A hybrid ARIMA–SVM model for the study of the remaining useful life of aircraft engines," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 346, pp. 184–191, Jan. 2019.
 - [20] C. F. Mason and N. A. Wilmot, "Price discontinuities in the market for RINs," *J. Econ. Behav. Organ.*, vol. 132, pp. 79–97, Dec. 2016.
 - [21] M. N. Fonseca, E. de O. Pamplona, V. E. de M. Valerio, G. Aquila, L. C. S. Rocha, and P. Rotela Junior, "Oil price volatility: A real option valuation approach in an African oil field," *J. Pet. Sci. Eng.*, vol. 150, pp. 297–304, 2017.
 - [22] H. Dehghani and D. Bogdanovic, "Copper price estimation using bat algorithm," *Resour. Policy*, vol. 55, pp. 55–61, Mar. 2018.
 - [23] M. Ntemi and C. Kotropoulos, "A dynamic dyadic particle filter for price prediction," *Signal Processing*, vol. 167, Feb. 2020.
 - [24] Y. Song, T. Liu, D. Liang, Y. Li, and X. Song, "A Fuzzy Stochastic Model for Carbon Price Prediction Under the Effect of Demand-related Policy in China's Carbon Market," *Ecol. Econ.*, vol. 157, pp. 253–265, Mar. 2019.
 - [25] G. Sikora, A. Michalak, Ł. Bielak, P. Miśta, and A. Wyłomańska, "Stochastic modeling of currency exchange rates with novel validation techniques," *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, vol. 523, pp. 1202–1215, Jun. 2019.
 - [26] Z. S. Abo-Hammour, O. M. K. Alsmadi, A. M. Al-Smadi, M. I. Zaqout, and M. S. Saraireh, "ARMA model order and parameter estimation using genetic algorithms," *Math. Comput. Model. Dyn. Syst.*, vol. 18, no. 2, pp. 201–221, Apr. 2012.
 - [27] B. C. Ervural, O. F. Beyca, and S. Zaim, "Model Estimation of ARMA Using Genetic Algorithms: A Case Study of Forecasting Natural Gas Consumption," *Procedia - Soc. Behav. Sci.*, vol. 235, pp. 537–545, Nov. 2016.
 - [28] K.-Y. Chen, "Forecasting systems reliability based on support vector regression with genetic algorithms," *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, vol. 92, no. 4, pp. 423–432, Apr. 2007.
 - [29] R. A. Mora-Gutiérrez, J. Ramírez-Rodríguez, and E. A. Rincón-García, "An optimization algorithm inspired by musical composition," *Artif. Intell. Rev.*, vol. 41, no. 3, pp. 301–315, Mar. 2014.
 - [30] S. M. Ashrafi and A. B. Dariane, "A novel and effective algorithm for numerical optimization: Melody Search (MS)," in *2011 11th International Conference on Hybrid Intelligent Systems (HIS)*, 2011, pp. 109–114.
 - [31] G. Zong Woo, J. H. Kim, and G. V. Loganathan, "A New Heuristic Optimization Algorithm: Harmony Search," *Simulation*, vol. 76, no. 2, pp. 60–68, Feb. 2001.

- [32] Elsevier, "ScienceDirect." [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/>. [Accessed: 03-Mar-2020].
- [33] Master en Finanzas Cuantitativas: Universidad de Alcalá - Madrid, "¿Qué es la econometría y en qué consiste?" [Online]. Available: <https://www.master-finanzas-cuantitativas.com/mastersque-es-la-econometria/>. [Accessed: 25-Oct-2019].
- [34] C. Sabino, *DICCIONARIO DE ECONOMIA Y FINANZAS*, 1a Edición. Caracas: Panapo, 1991.
- [35] D. Peña, *Análisis de series temporales*, 1st ed. Madrid: Alianza Editorial, 2005.
- [36] G. J. Janacek, *Practical time series*, 1st ed. New York, NY: Arnold, 2001.
- [37] A. Díaz Mata and V. M. Aguilera Gómez, *El Mercado Bursátil en el Sistema Financiero*, 1st ed. Ciudad de México: McGraw-Hill Interamericana, 2005.
- [38] M. Díaz Mondragon, *Mercados financieros de México y el mundo*, 1st ed. Ciudad de México: Gasca-Sicco, 2002.
- [39] C. E. Herrera Avendaño, *Bolsa de Valores y Mercados Financieros*, 1st ed. Ciudad de México: Gasca-Sicco, 2003.
- [40] G. Rubio Guerrero, "Perspectiva multivariante de los pronósticos en las pymes industriales de Ibagué (Colombia)," *Rev. Fac. Ciencias Económicas*, no. 2, pp. 25–40, 2017.
- [41] C. Muñoz Poblete, "Métodos mixtos: una aproximación a sus ventajas y limitaciones en la investigación de sistemas y servicios de salud," *Rev. Chil. Salud Pública*, vol. 17, no. 3, pp. 218–223, Oct. 2013.
- [42] I. P. Madero Suarez and L. F. Gómez López, "El proceso de comprensión lectora en alumnos de tercero de secundaria," *Rev. Mex. Investig. Educ.*, vol. 18, no. 56, pp. 113–139, 2013.
- [43] W. L. Winston, *Investigación de operaciones: Aplicaciones y algoritmos*, 4th ed. Ciudad de México: Thomson International, 2004.
- [44] R. Romera, "MOVIMIENTO BROWNIANO," 2009.
- [45] D. Pérez Fernández, J. C. Cortés López, and R. Villanueva Micó, "Cálculo estocástico en finanzas: Aplicación del Modelo Browniano activo subyacente FCC.MC en el IBEX-35," Universidad Politécnica de Valencia, 2015.
- [46] J. Jeon and J. W. Taylor, "Short-term density forecasting of wave energy using ARMA-GARCH models and kernel density estimation," *Int. J. Forecast.*, vol. 32, no. 3, pp. 991–1004, 2016.
- [47] Y. Zhang, Y. Zhang, Z. Deng, X. P. Zhang, and H. Liu, "Sea surface target detection based on complex ARMA-GARCH processes," *Digit. Signal Process. A Rev. J.*, vol. 70, pp. 1–13, Nov. 2017.
- [48] Q. liu *et al.*, "SPI-based drought simulation and prediction using ARMA-GARCH model," *Appl. Math. Comput.*, vol. 355, pp. 96–107, Aug. 2019.
- [49] H. Sun, D. Yan, N. Zhao, and J. Zhou, "Empirical investigation on modeling solar radiation series with ARMA-GARCH models," *Energy Convers. Manag.*, vol. 92, pp. 385–395, Mar. 2015.
- [50] C. Bikcora, L. Verheijen, and S. Weiland, "Density forecasting of daily electricity demand with ARMA-GARCH, CAViaR, and CARE econometric models," *Sustain. Energy, Grids Networks*, vol. 13, pp. 148–156, Mar. 2018.

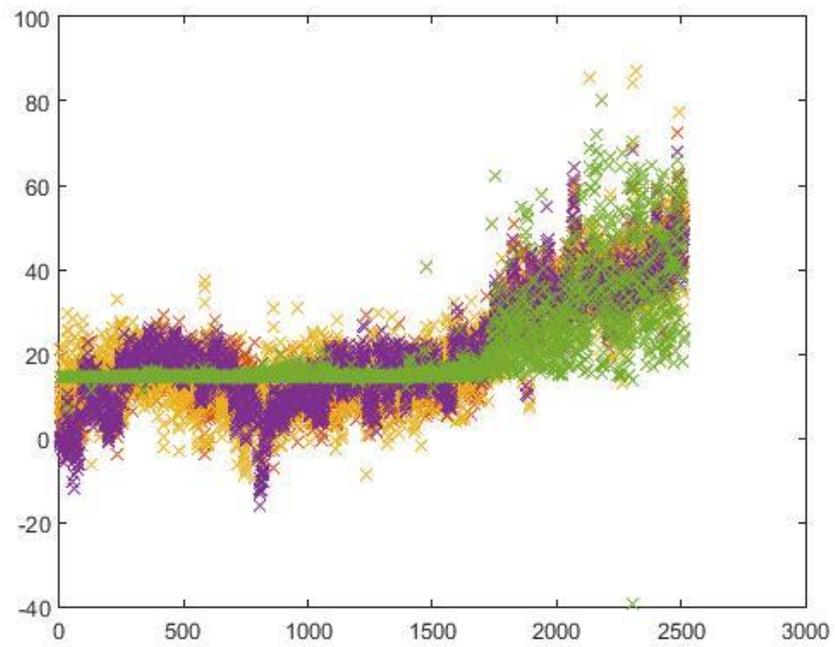
- [51] W. Xu, R. Gu, Y. Liu, and Y. Dai, "Forecasting energy consumption using a new GM-ARMA model based on HP filter: The case of Guangdong Province of China," *Econ. Model.*, vol. 45, pp. 127–135, Feb. 2015.
- [52] C.-X. Nie, "Correlation dimension of financial market," *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, vol. 473, pp. 632–639, 2017.
- [53] Y. Al Douri, H. Al-Chalabi, and J. Lundberg, "Time Series Forecasting using Genetic Algorithm: A Case Study of Maintenance Cost Data for Tunnel Fans," pp. 4–9, Nov. 2018.
- [54] P. Cerezo, "La Generación Z y la información," *Revista de Estudios de Juventud. Los auténticos nativos digitales: ¿estamos preparados para la Generación Z?*, Madrid, pp. 95–109, Dec-2016.
- [55] L. G. Juárez Hernández and I. Ponce Lopez, "Construcción y validación de un instrumento para evaluar el abordaje de la sociedad del conocimiento en docentes," *Apunt. Univ.*, vol. 10, no. 1, pp. 40–66, 2019.
- [56] L. Montuschi, "Datos, Información y Conocimiento. De la Información a la Sociedad del Conocimiento," 2001.
- [57] S. Tobón, C. E. Guzmán, J. Silvano Hernández, and S. Cardona, "Sociedad del conocimiento: Estudio documental desde una perspectiva humanista y compleja," *Paradigma*, vol. 36, no. 2, pp. 7–36, 2015.
- [58] D. Rodríguez Gómez, "Modelos para la creación y gestión del conocimiento: una aproximación teórica," 2006.
- [59] L. M. Quiroga, "Sistemas de filtrado: un puente tecnológico entre la oferta y demanda de información en línea al servicio de la toma de decisiones," *Las nuevas Tecnol. la Inf. y la Comun. y la Inst. Soc. hacia una gestión basada en el Conoc.*, pp. 49–57, 2005.
- [60] I. T. Jolliffe, "PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS: A BEGINNER'S GUIDE — I. Introduction and application," *Weather*, vol. 45, no. 10, pp. 375–382, Oct. 1990.
- [61] K. P. F.R.S., "LIII. On lines and planes of closest fit to systems of points in space," *London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci.*, vol. 2, no. 11, pp. 559–572, 1901.
- [62] I. T. Jolliffe, *Principal Component Analysis*, 2nd ed. Springer-Verlag New York, 2002.
- [63] J. C. Zavala-Díaz, M. A. Cruz-Chavez, J. R. Vanoye, and M. H. Cruz-Rosales, "Modelo matemático multiobjetivo para la selección de una cartera de inversión en la bolsa mexicana de valores," *La Comput. Herram. Indispens. en Divers. áreas Conoc.*, p. 217, 2009.
- [64] D. P. Foster, H. Karloff, and J. Thaler, "Variable selection is hard," in *Journal of Machine Learning Research*, 2015, vol. 40, no. 2015, pp. 1–14.
- [65] M. Walter and J. Zimmermann, *Multi-project management with a multi-skilled workforce: A quantitative approach aiming at small project teams*. Springer Science+Business Media, 2015.
- [66] G. Zong Woo, *Music-Inspired Harmony Search Algorithm*, 1st ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [67] J. H. Holland, *Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. Oxford, England: U Michigan Press, 1975.

- [68] F. Gutiérrez Méndez, "Optimización Multiobjetivo Usando Algoritmos Genéticos Culturales," Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Unidad Zacatenco, 2011.
- [69] E. Zitzler and L. Thiele, "Multiobjective optimization using evolutionary algorithms - A comparative case study," in *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 1998, vol. 1498 LNCS, pp. 292–301.
- [70] A. L. Caballero, M. A. G. Andrade, and E. A. R. Garcia, "A simulated annealing-based multiobjective optimization algorithm for political districting," *IEEE Lat. Am. Trans.*, vol. 16, no. 6, pp. 1723–1731, Jun. 2018.
- [71] M. Fleischer, "The measure of Pareto optima applications to multi-objective metaheuristics," *Lect. Notes Comput. Sci. (including Subser. Lect. Notes Artif. Intell. Lect. Notes Bioinformatics)*, vol. 2632, pp. 519–533, 2003.
- [72] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, and T. Meyarivan, "A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II," *IEEE Trans. Evol. Comput.*, vol. 6, no. 2, pp. 182–197, Apr. 2002.
- [73] D. A. Van Veldhuizen and G. B. Lamont, "On measuring multiobjective evolutionary algorithm performance," in *Proceedings of the 2000 Congress on Evolutionary Computation, CEC 2000*, 2000, vol. 1, pp. 204–211.
- [74] D. A. Van Veldhuizen and G. B. Lamont, "Multiobjective Evolutionary Algorithm Research: A History and Analysis," Wright-Patterson AFB, 1998.
- [75] E. Zitzler and L. Thiele, "Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength Pareto approach," *IEEE Trans. Evol. Comput.*, vol. 3, no. 4, pp. 257–271, Nov. 1999.
- [76] E. Agichtein, E. Brill, S. Dumais, and R. Ragno, "Learning user interaction models for predicting web search result preferences," in *Proceedings of the Twenty-Ninth Annual International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval*, 2006, vol. 2006, pp. 3–10.
- [77] G. N. Yannakakis, "Preference learning for affective modeling," in *Proceedings - 2009 3rd International Conference on Affective Computing and Intelligent Interaction and Workshops, ACII 2009*, 2009.
- [78] J. D. M. Rennie and N. Srebro, "Fast Maximum Margin Matrix Factorization for collaborative prediction," in *ICML 2005 - Proceedings of the 22nd International Conference on Machine Learning*, 2005, pp. 713–720.
- [79] Y. Hu, C. Volinsky, and Y. Koren, "Collaborative filtering for implicit feedback datasets," in *Proceedings - IEEE International Conference on Data Mining, ICDM*, 2008, pp. 263–272.
- [80] P. Chakrabarti and K. Guhathakurata, "Which is the right option for Indian market: Gaussian, normal inverse Gaussian, or Tsallis?," *IIMB Manag. Rev.*, vol. 31, no. 3, pp. 238–249, Sep. 2019.
- [81] S. G. de-los-Cobos-Silva, R. A. Mora-Gutiérrez, M. A. Gutiérrez-Andrade, E. A. Rincón-García, A. Ponsich, and P. Lara-Velázquez, "Development of seven hybrid methods based on collective intelligence for solving nonlinear constrained optimization problems," *Artif. Intell. Rev.*, vol. 49, no. 2, pp. 245–279, Feb. 2018.

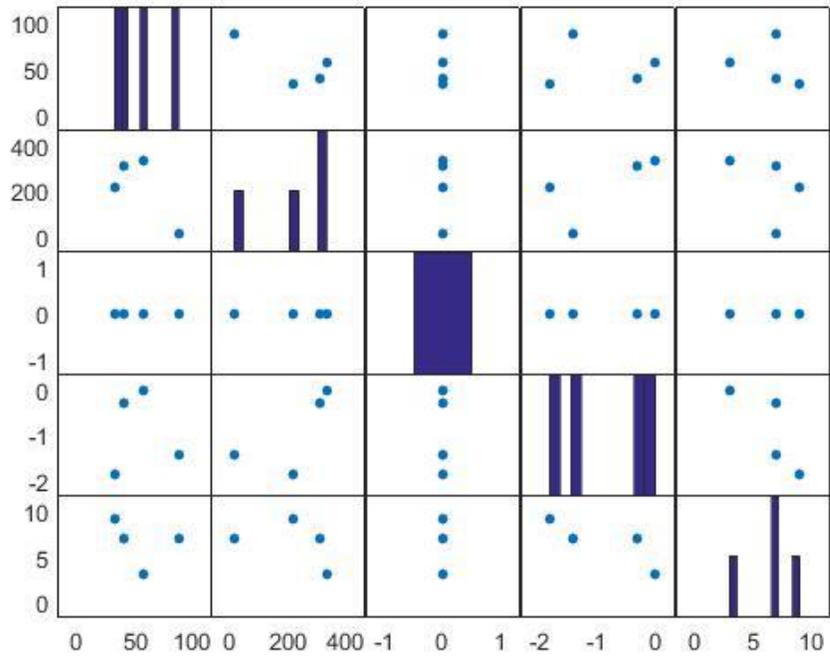
ANEXO 1

Resultados Filtrado

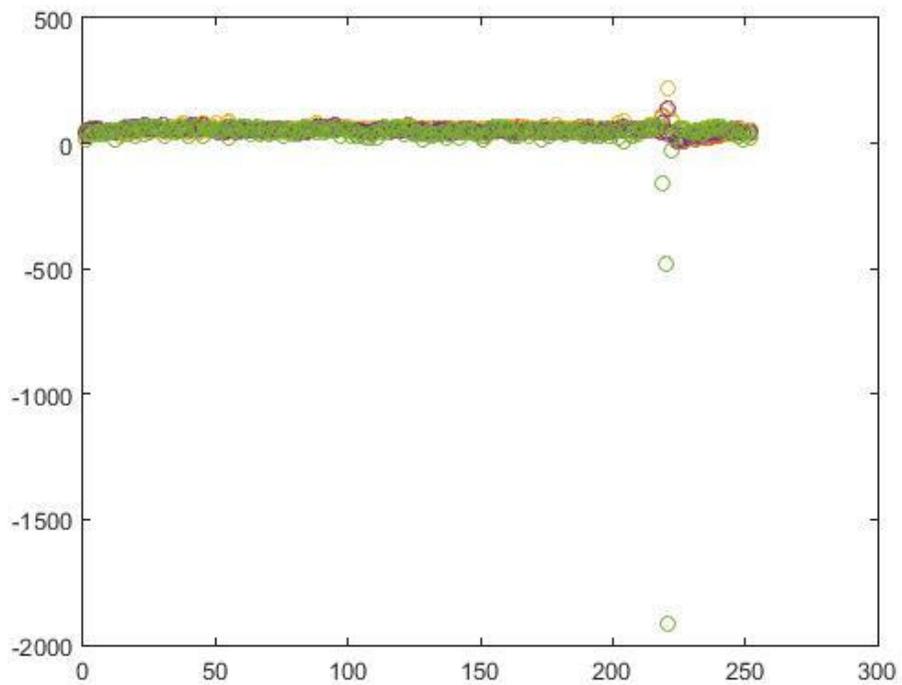
a) AL***



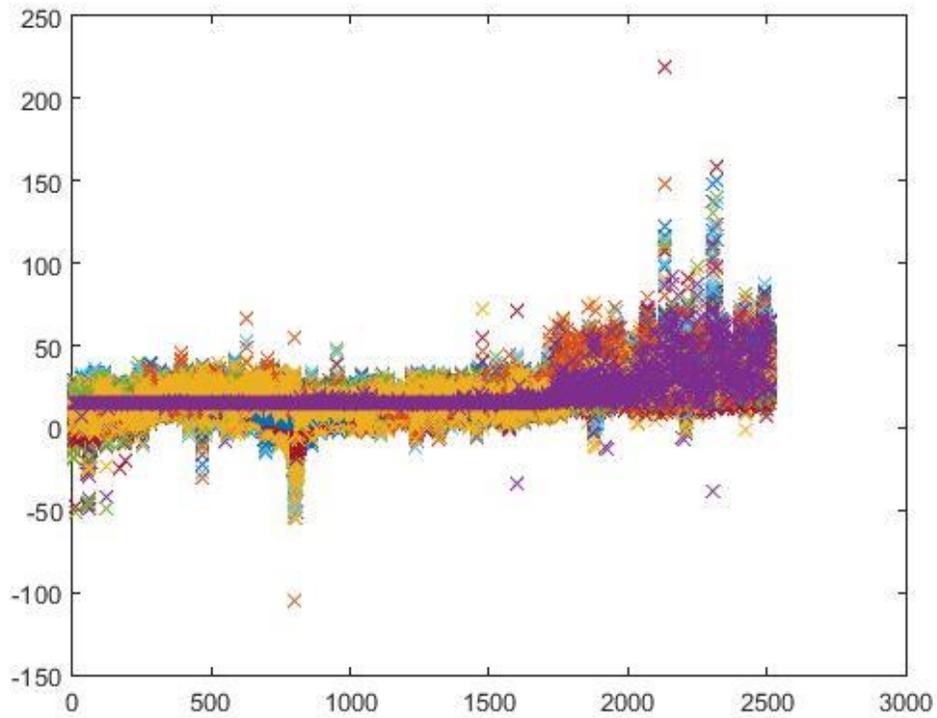
Pronóstico del valor/*stock* sobre el conjunto de entrenamiento antes del filtrado de variables.



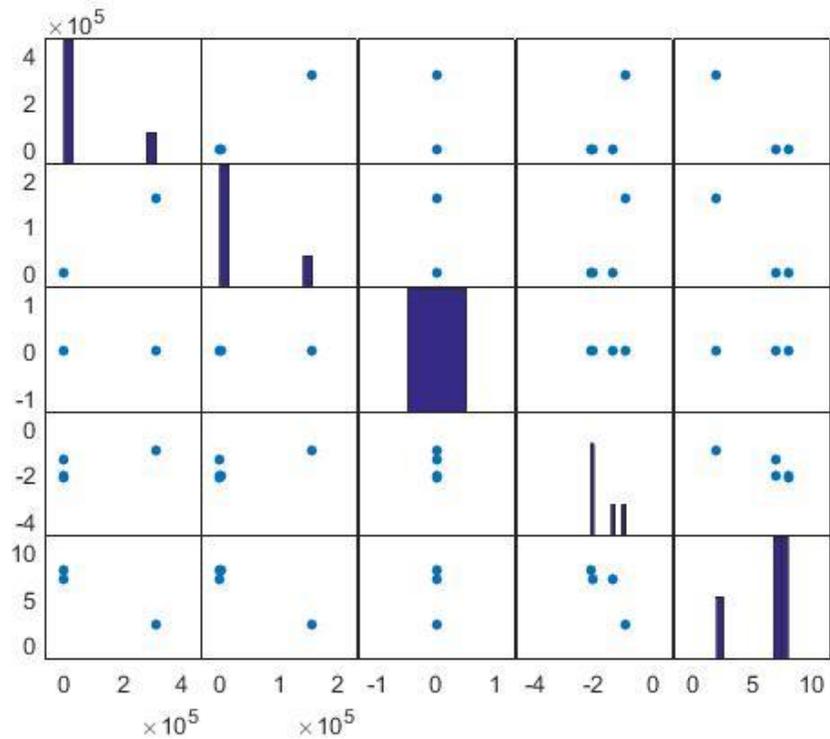
Frentes de Pareto de los objetivos del modelo antes del filtrado de variables.



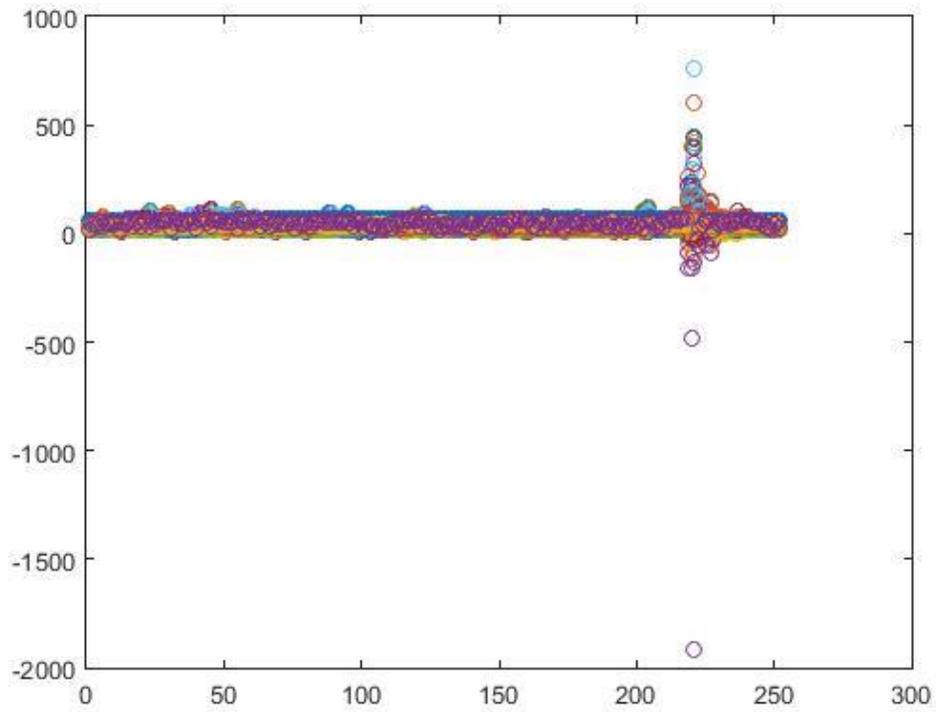
Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de prueba antes del filtrado de variables.



Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de entrenamiento después del filtrado de variables.

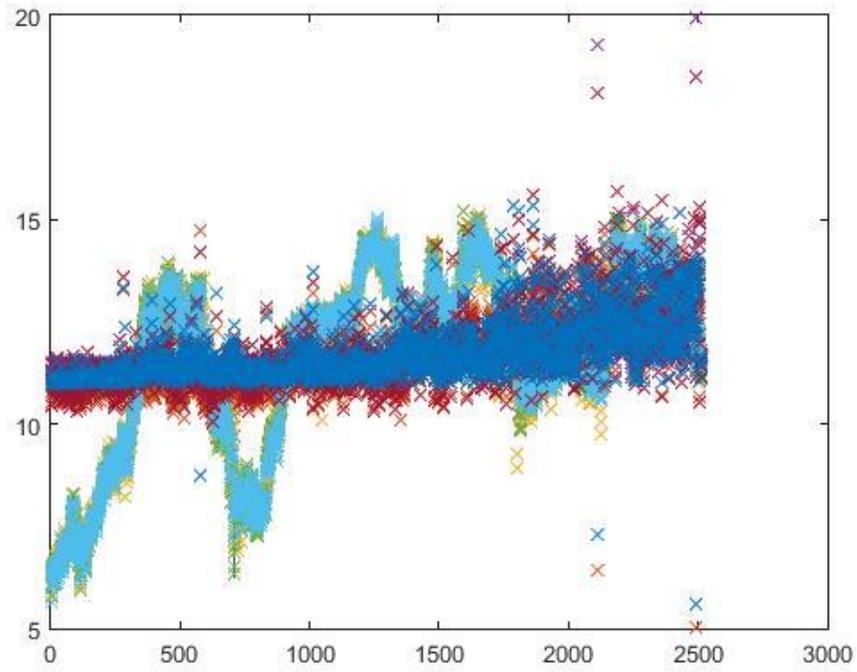


Frentes de Pareto de los objetivos del modelo después del filtrado de variables

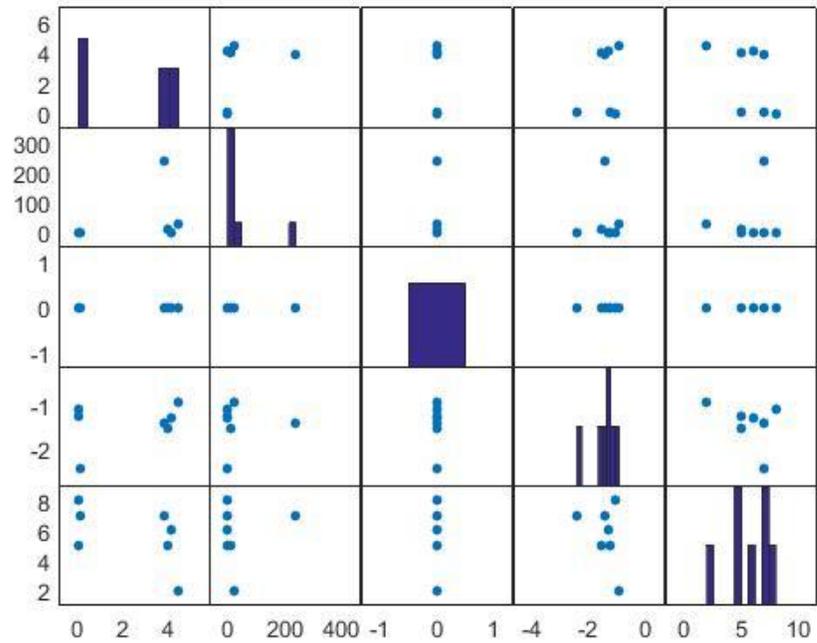


Pronóstico del valor/*stock* sobre el conjunto de prueba después del filtrado de variables.

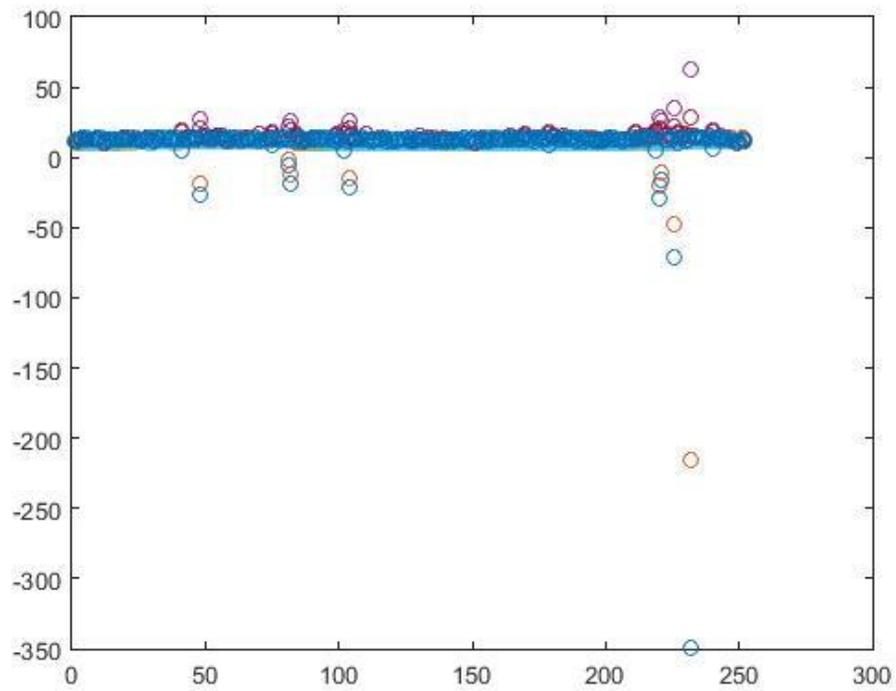
b) AM**



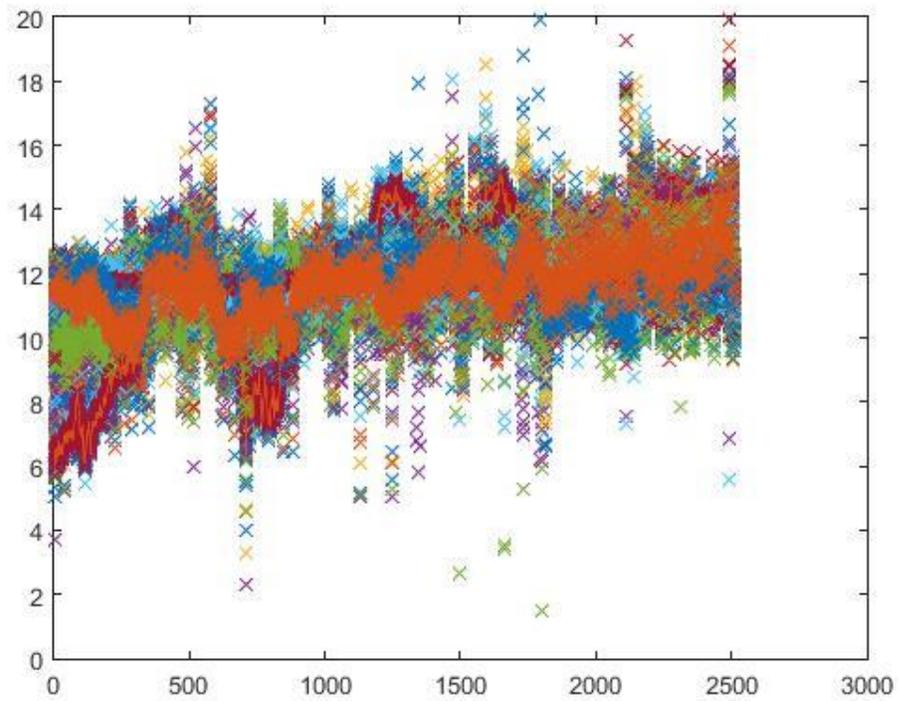
Pronóstico del valor/*stock* sobre el conjunto de entrenamiento antes del filtrado de variables.



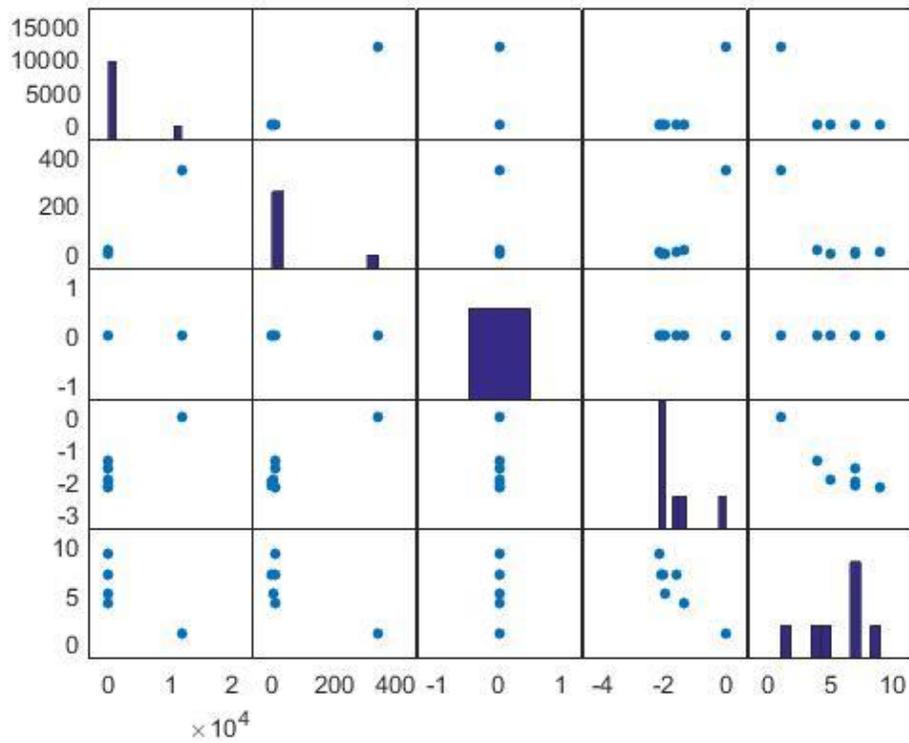
Frentes de Pareto de los objetivos del modelo antes del filtrado de variables



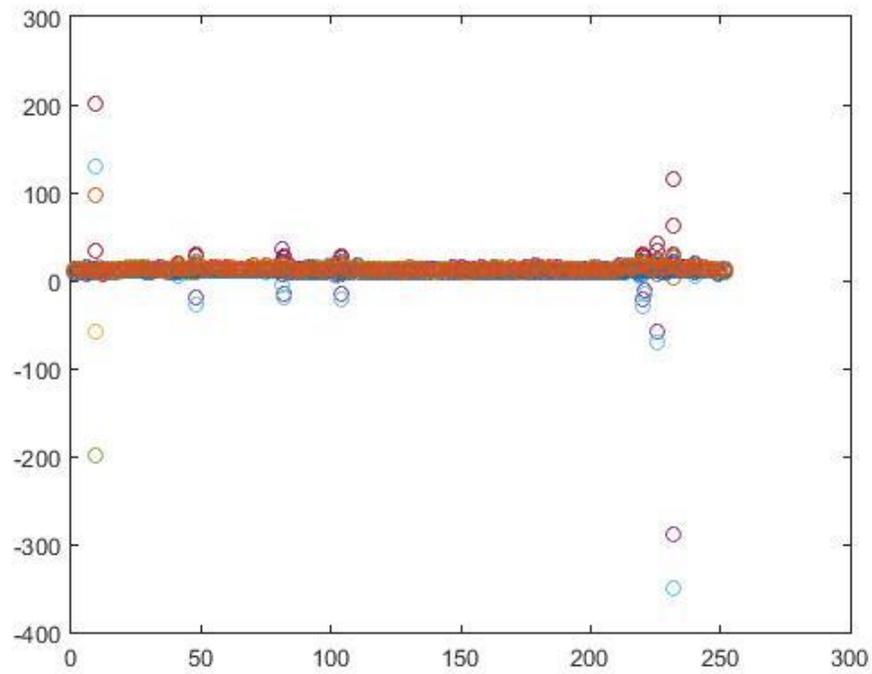
Pronóstico del valor/*stock* sobre el conjunto de prueba antes del filtrado de variables.



Pronóstico del valor/*stock* sobre el conjunto de entrenamiento después del filtrado de variables

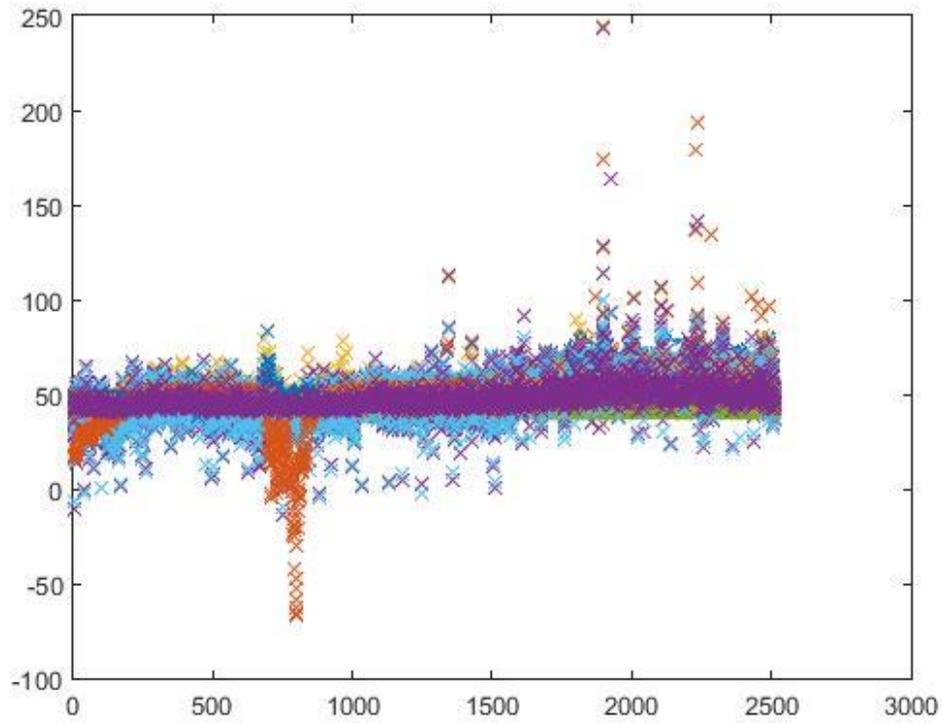


Frentes de Pareto de los objetivos del modelo después del filtrado de variables

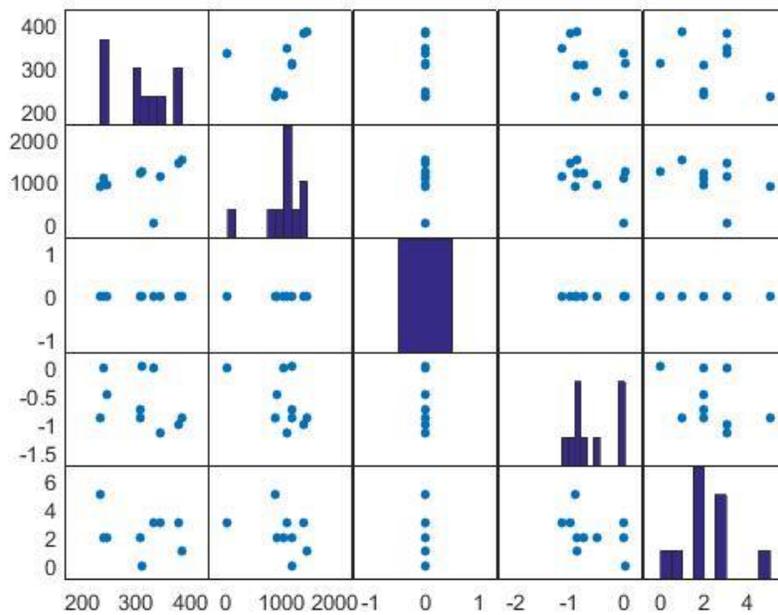


Pronóstico del valor/*stock* sobre el conjunto de prueba después del filtrado de variables.

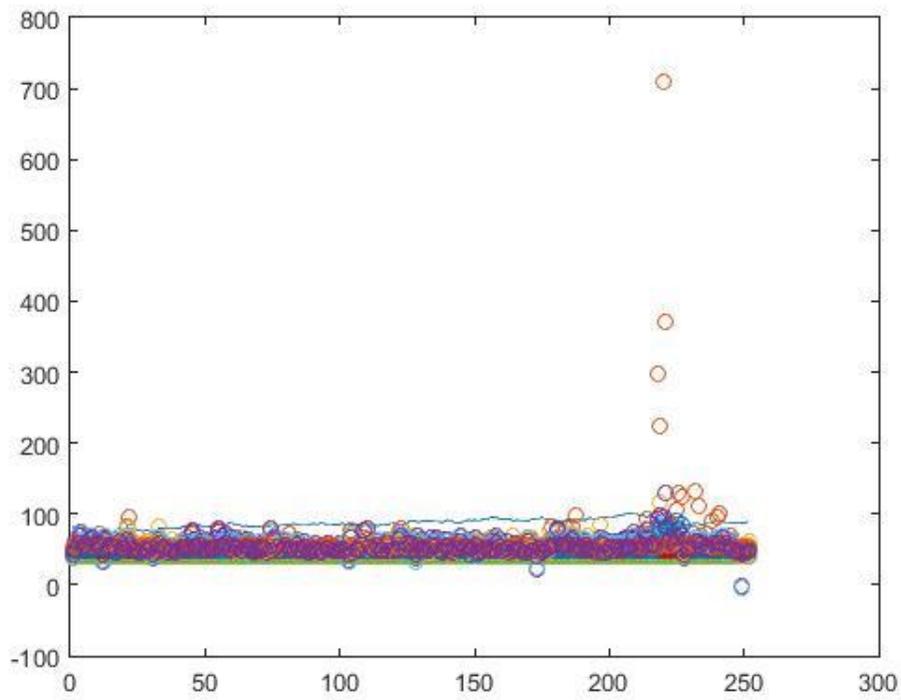
c) GFN*****



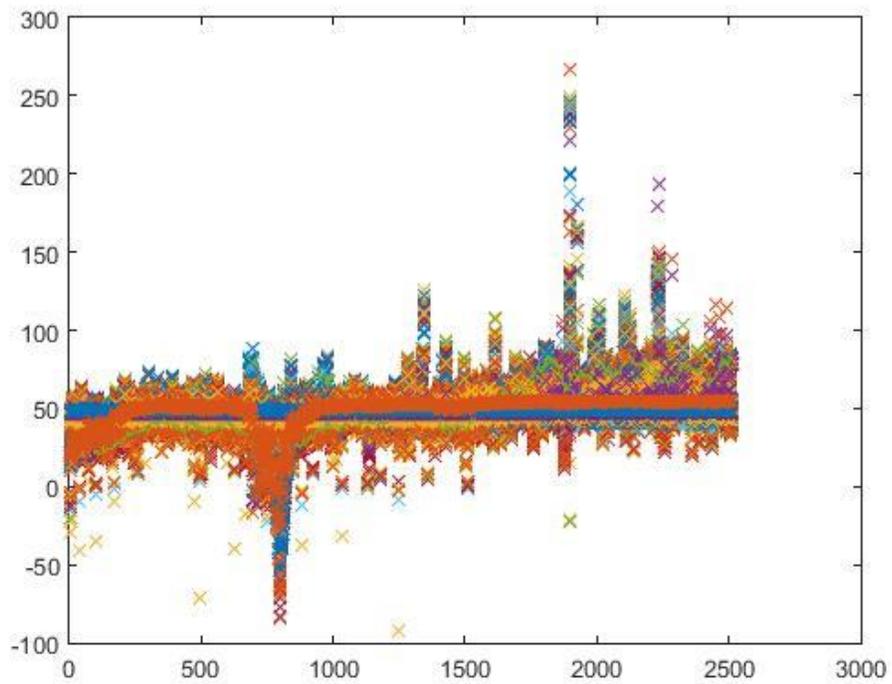
Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de entrenamiento antes del filtrado de variables.



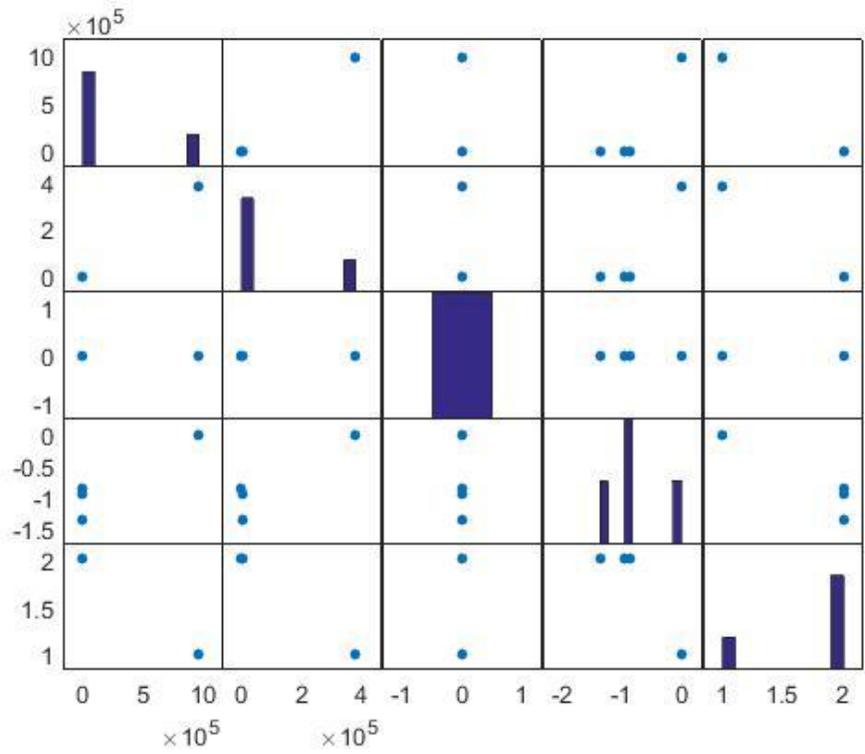
Frentes de Pareto de los objetivos del modelo antes del filtrado de variables



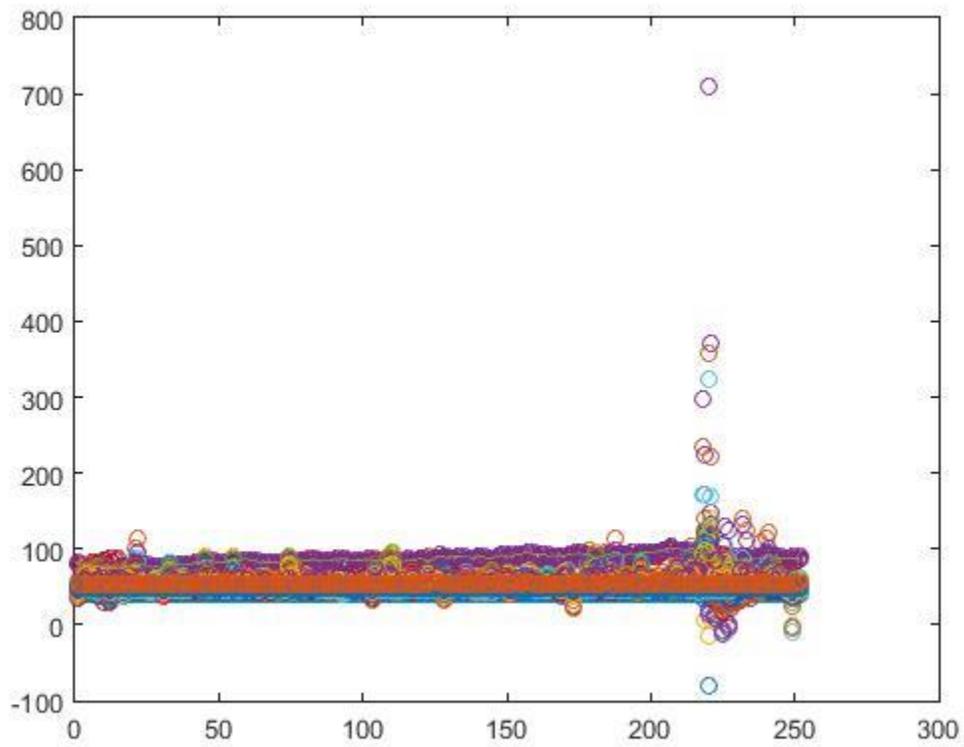
Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de prueba antes del filtrado de variables.



Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de entrenamiento después del filtrado de variables

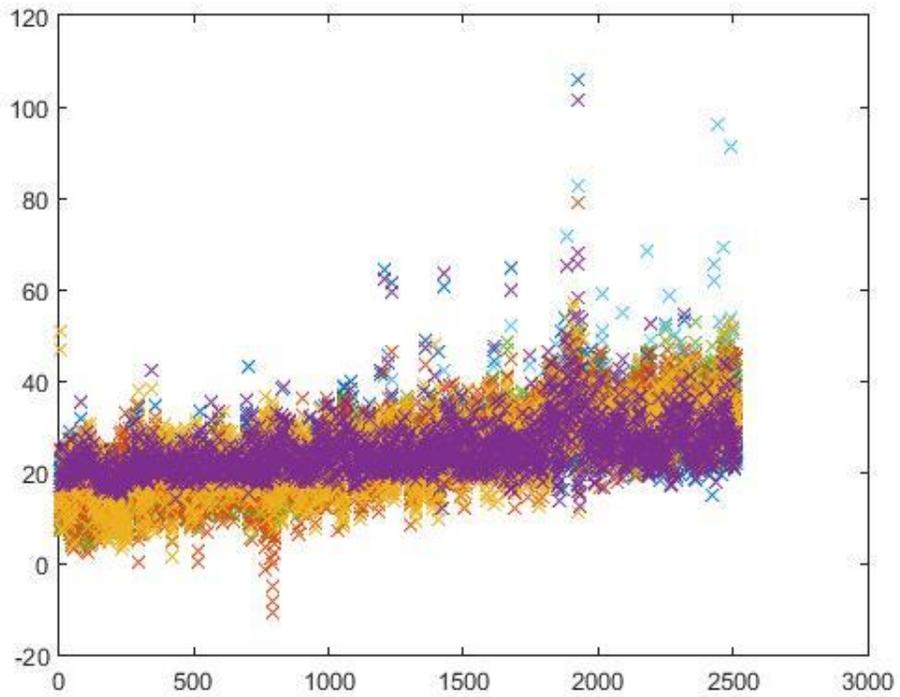


Frentes de Pareto de los objetivos del modelo después del filtrado de variables

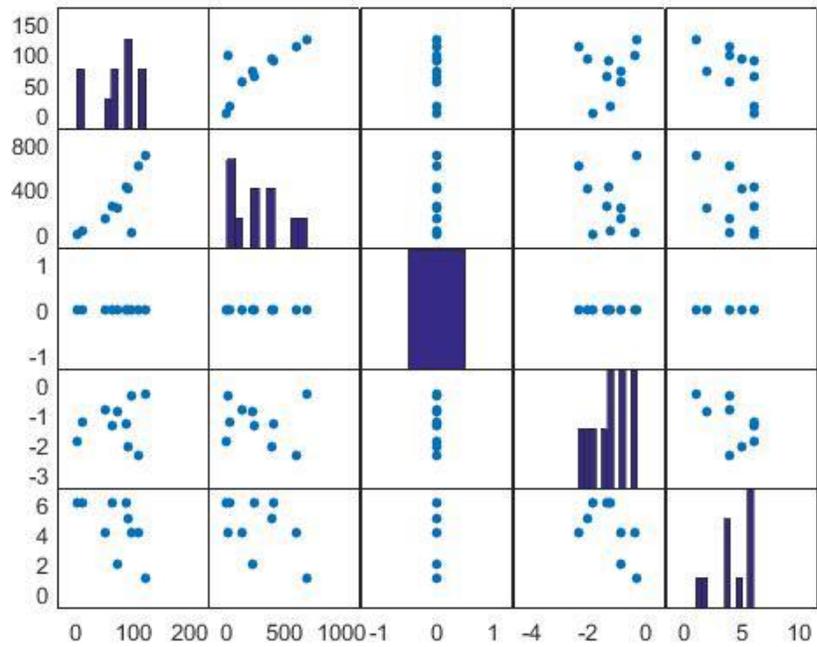


Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de prueba después del filtrado de variables.

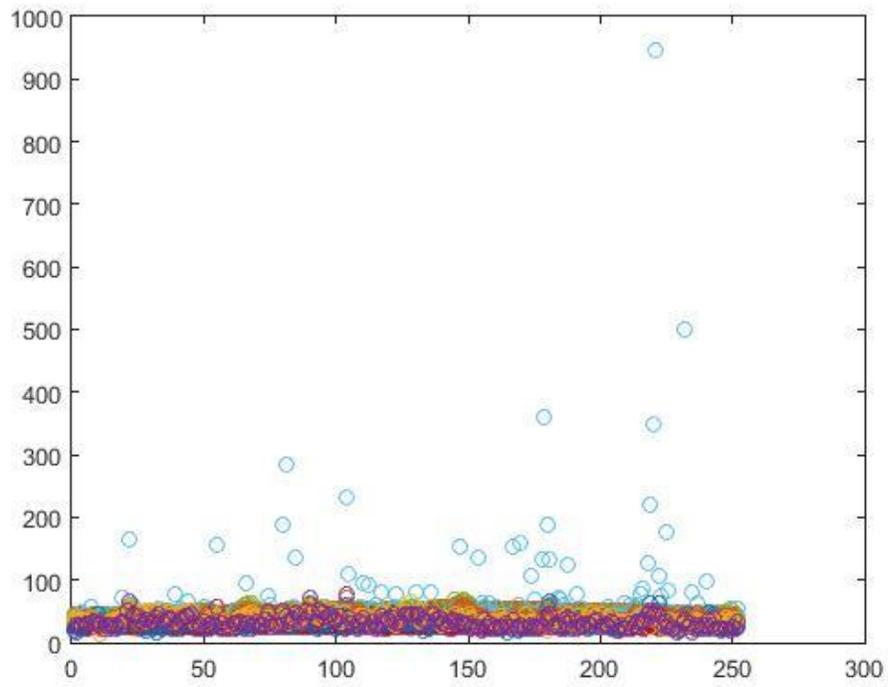
d) BI****



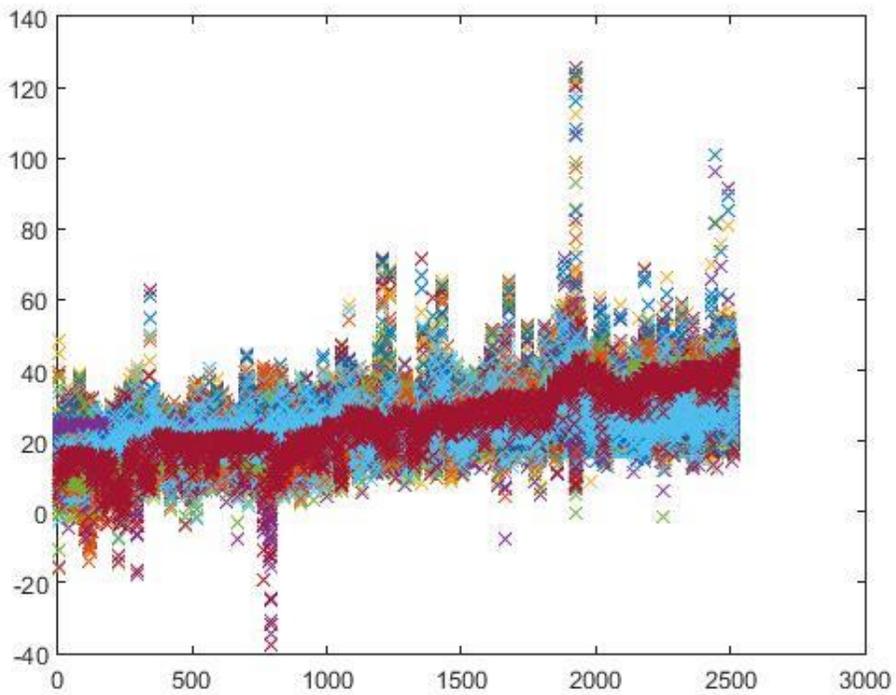
Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de entrenamiento antes del filtrado de variables.



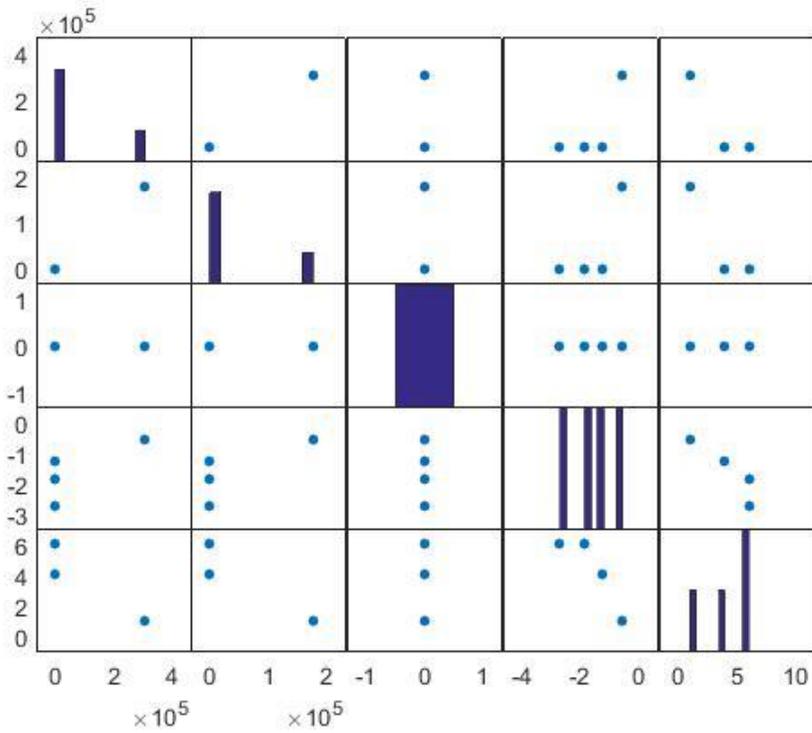
Frentes de Pareto de los objetivos del modelo antes del filtrado de variables



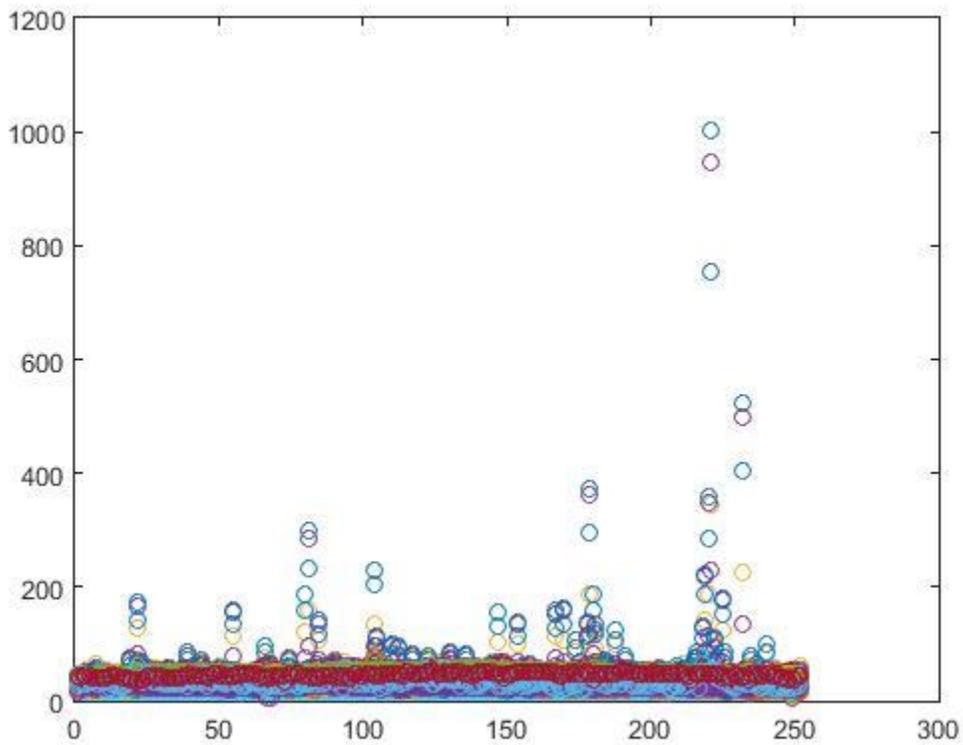
Pronóstico del valor/*stock* sobre el conjunto de prueba antes del filtrado de variables.



Pronóstico del valor/*stock* sobre el conjunto de entrenamiento después del filtrado de variables

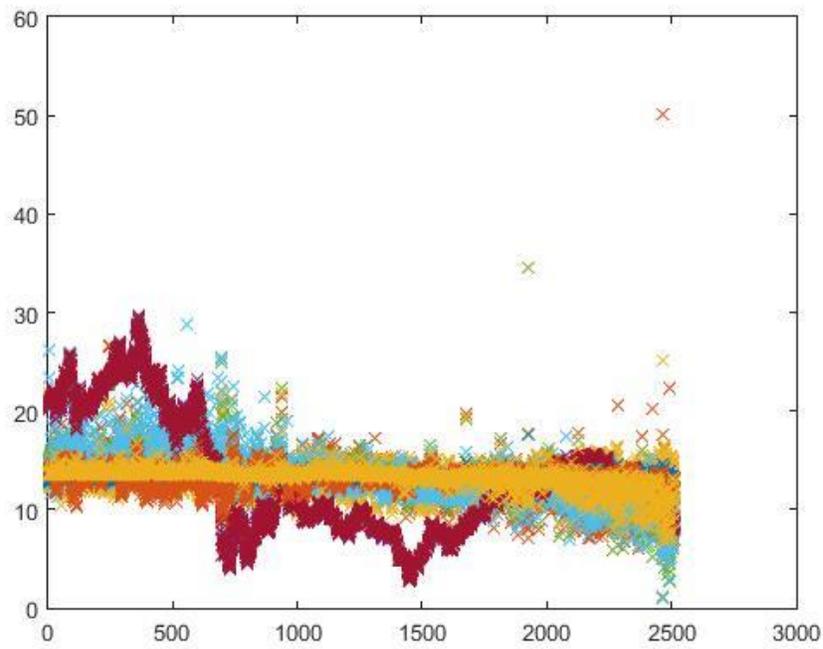


Frentes de Pareto de los objetivos del modelo después del filtrado de variables

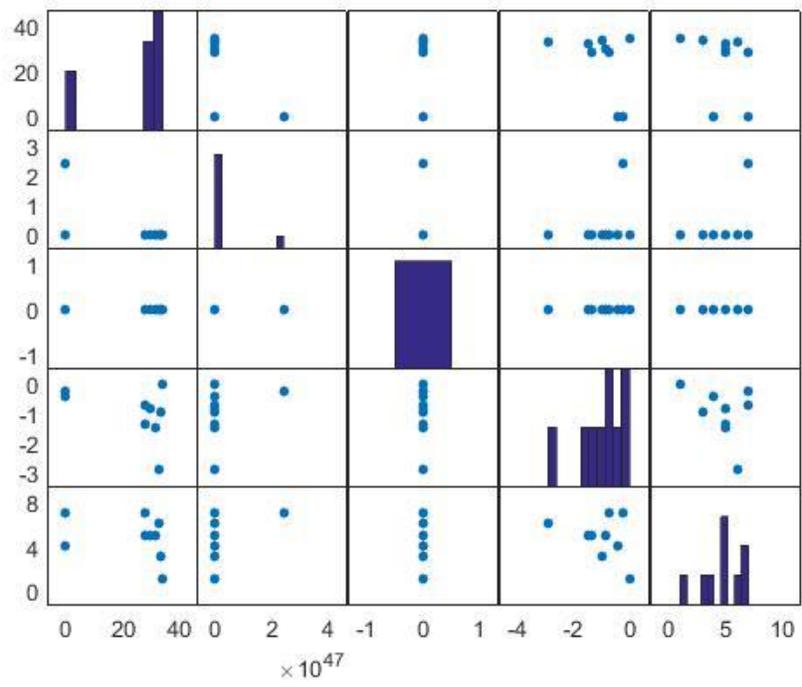


Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de prueba después del filtrado de variables.

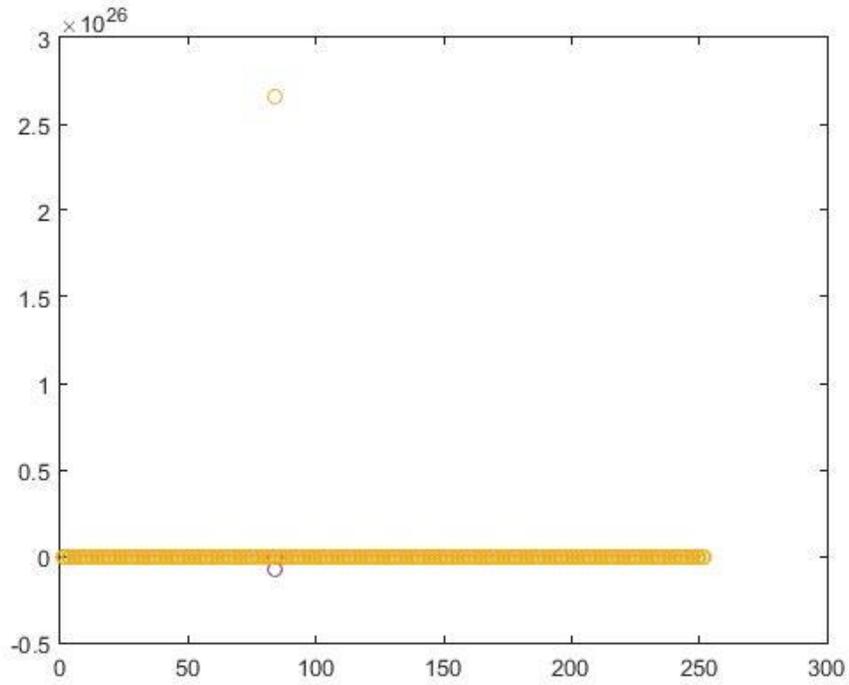
e) CE*****



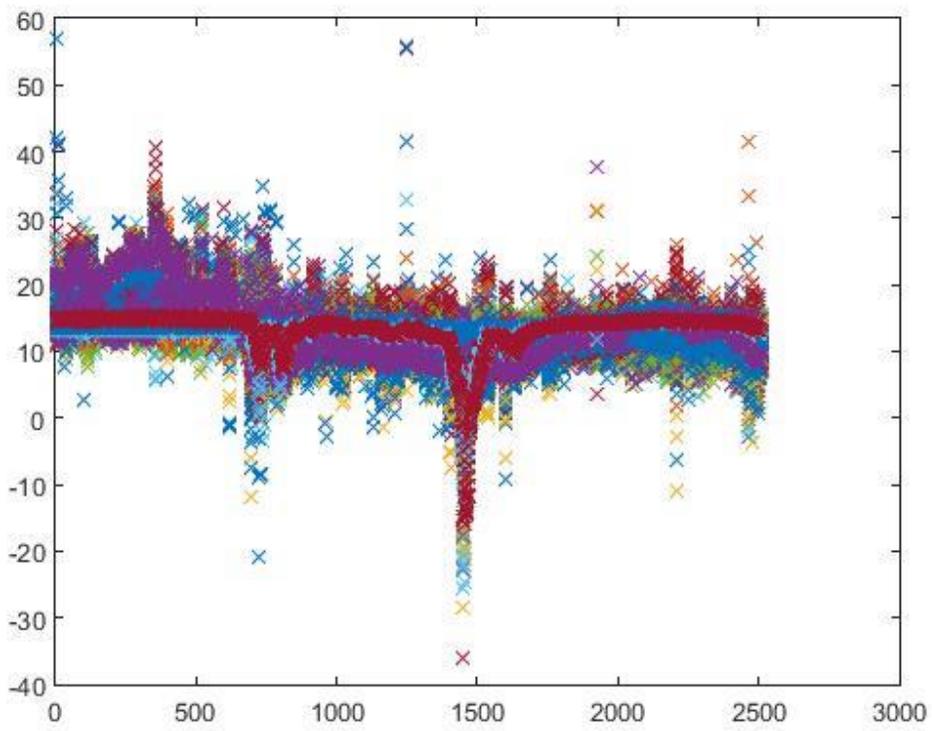
Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de entrenamiento antes del filtrado de variables.



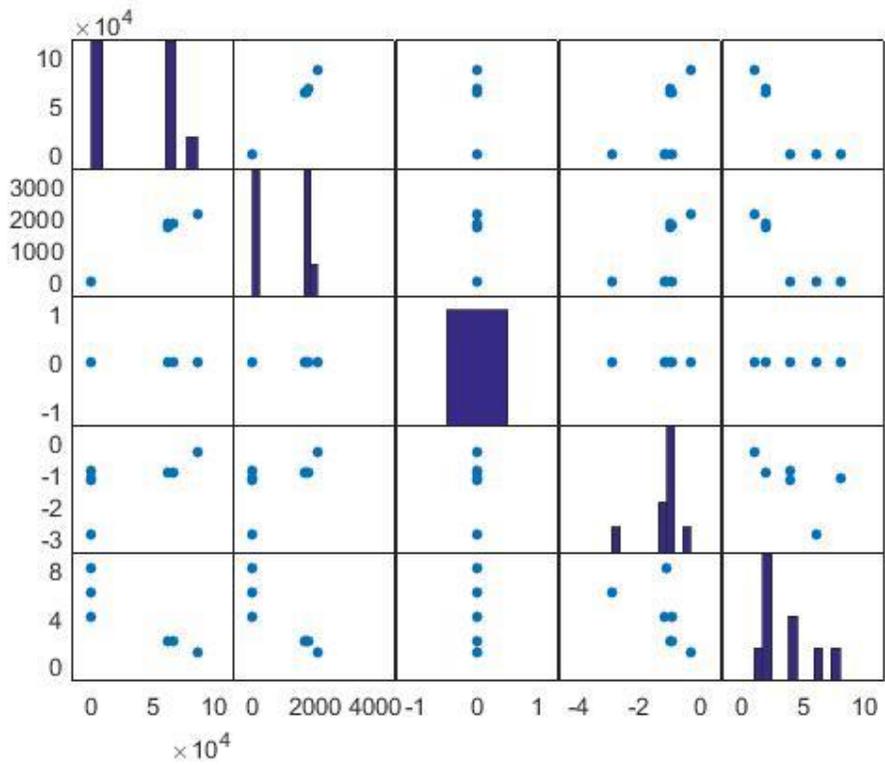
Frentes de Pareto de los objetivos del modelo antes del filtrado de variables



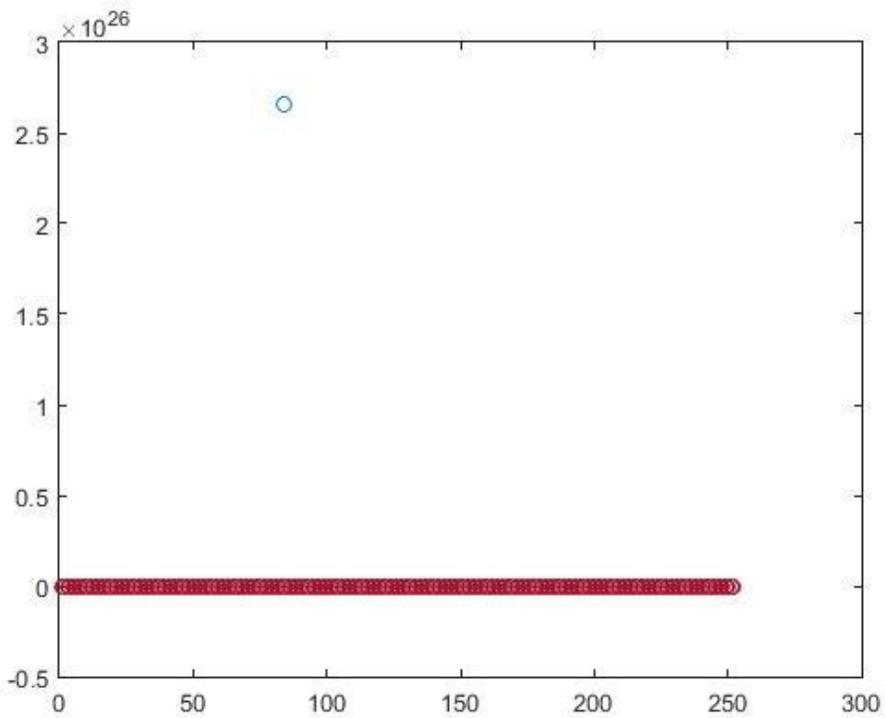
Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de prueba antes del filtrado de variables.



Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de entrenamiento después del filtrado de variables

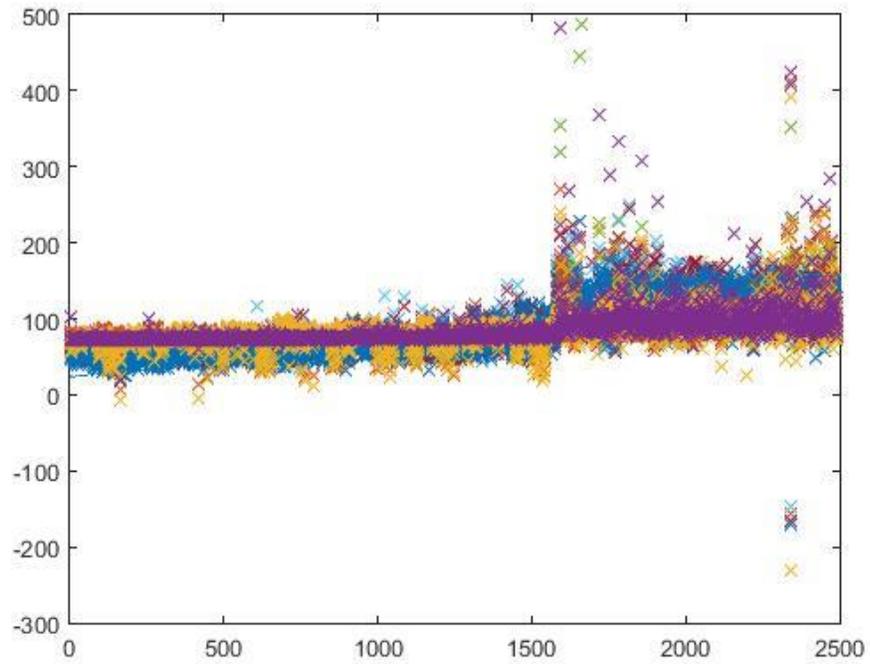


Frentes de Pareto de los objetivos del modelo después del filtrado de variables

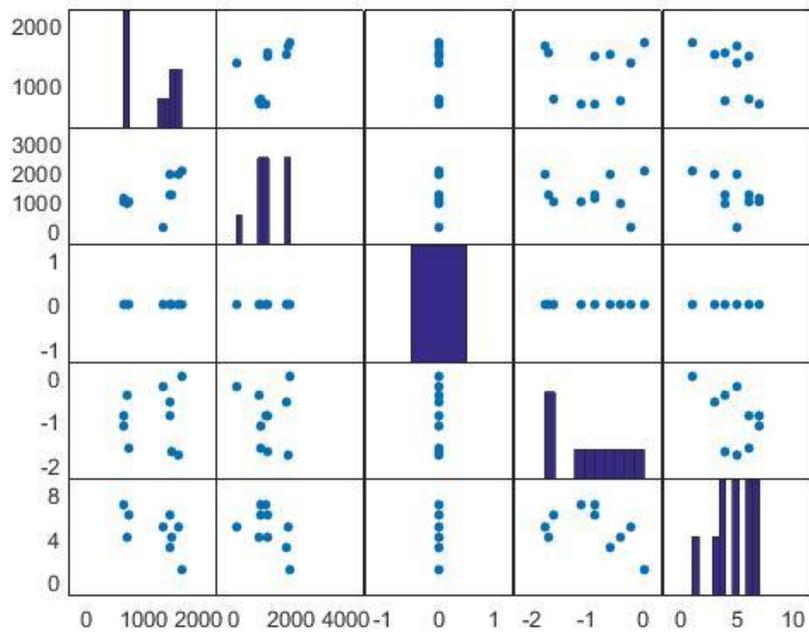


Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de prueba después del filtrado de variables.

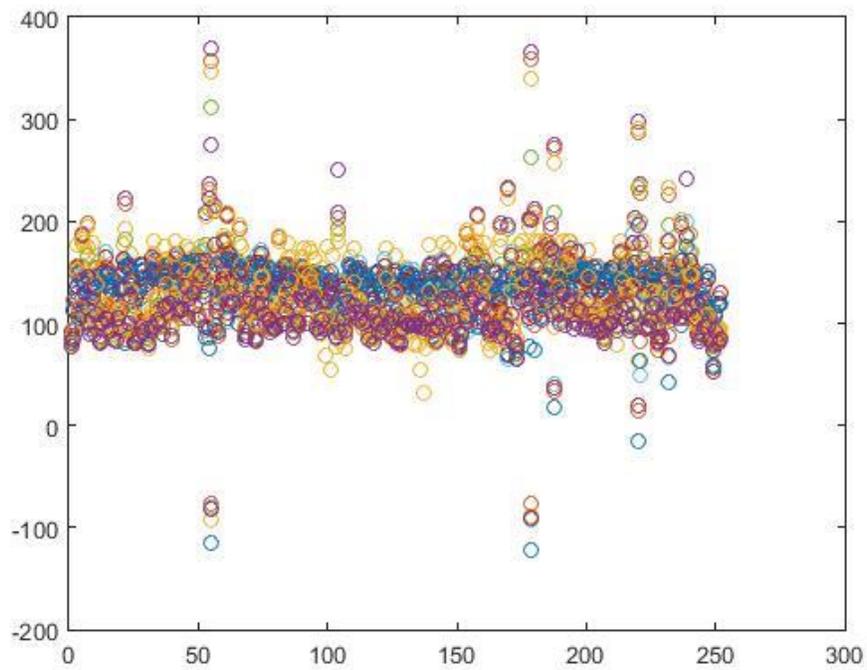
f) CO*****



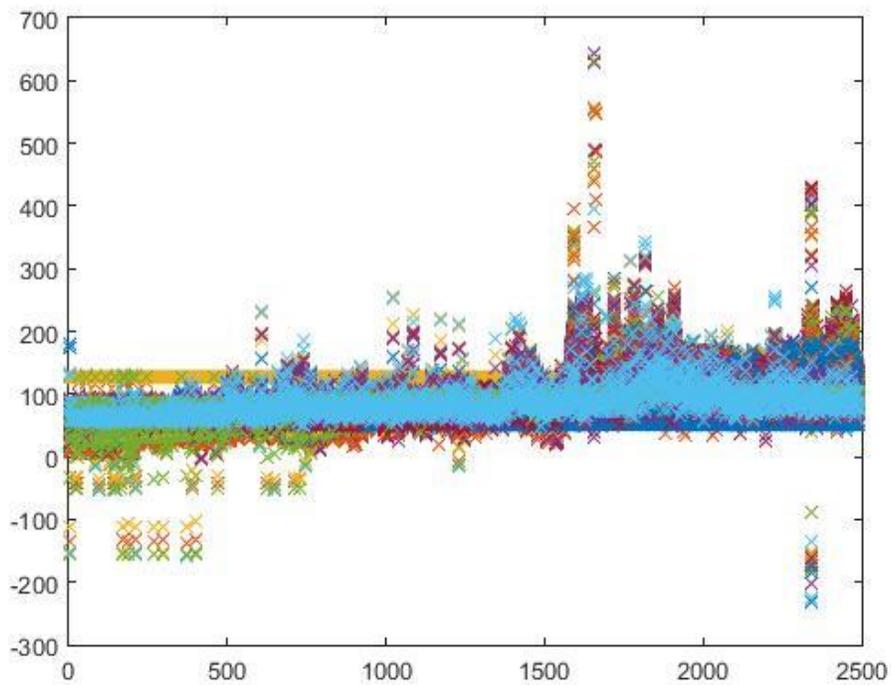
Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de entrenamiento antes del filtrado de variables.



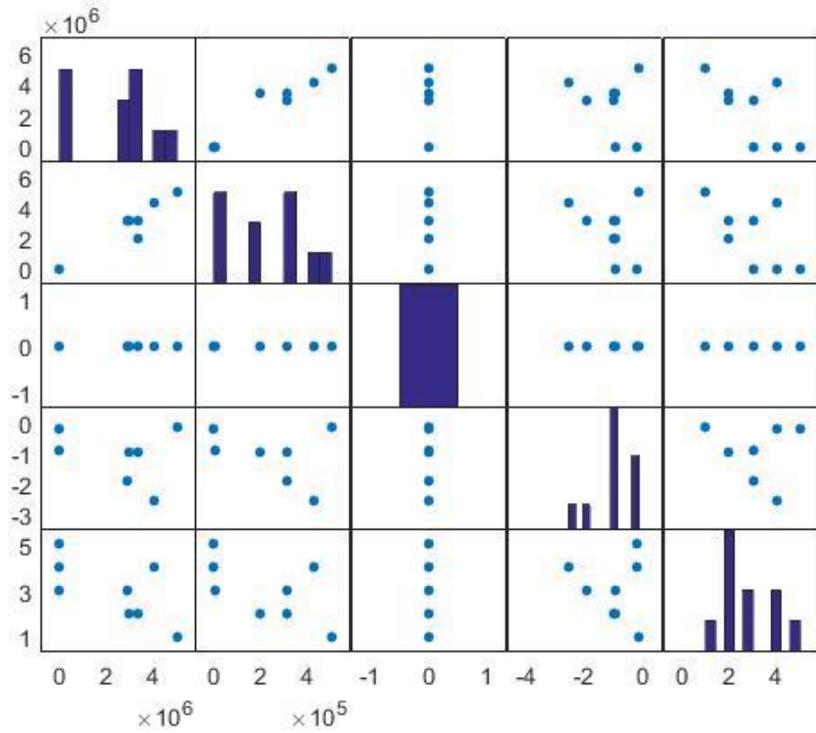
Frentes de Pareto de los objetivos del modelo antes del filtrado de variables



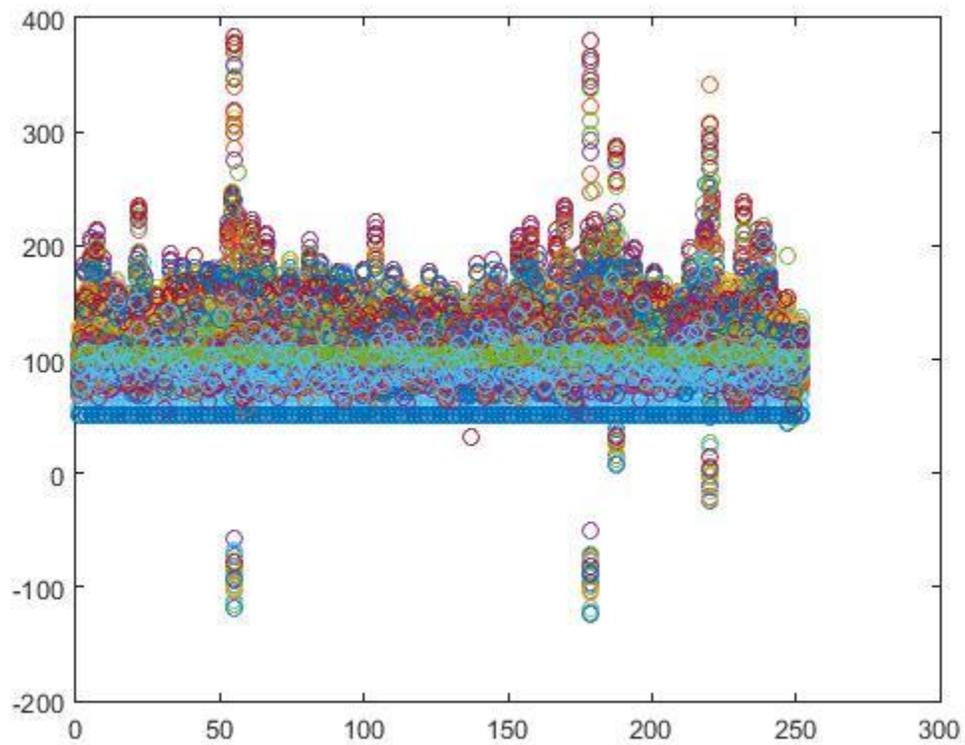
Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de prueba antes del filtrado de variables.



Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de entrenamiento después del filtrado de variables

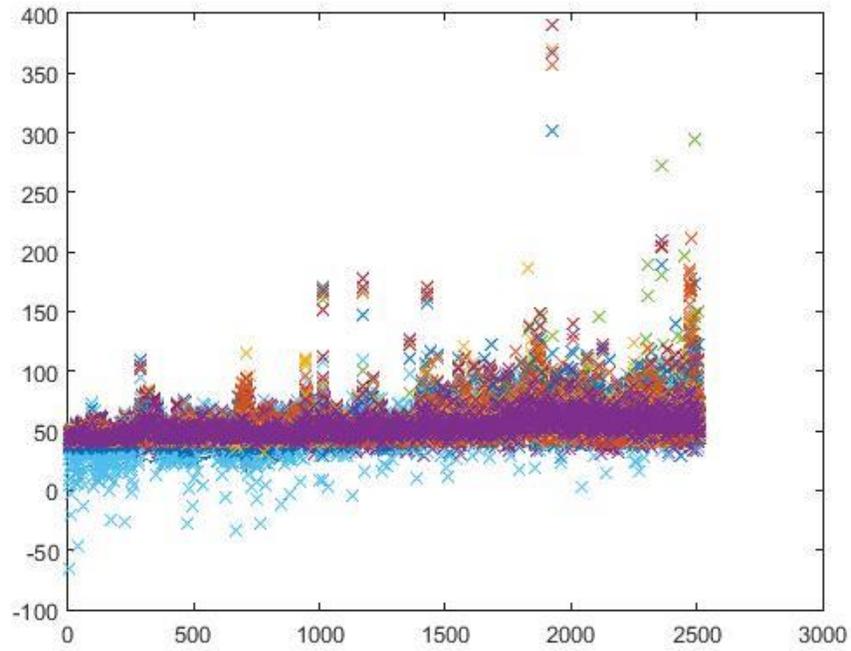


Frentes de Pareto de los objetivos del modelo después del filtrado de variables

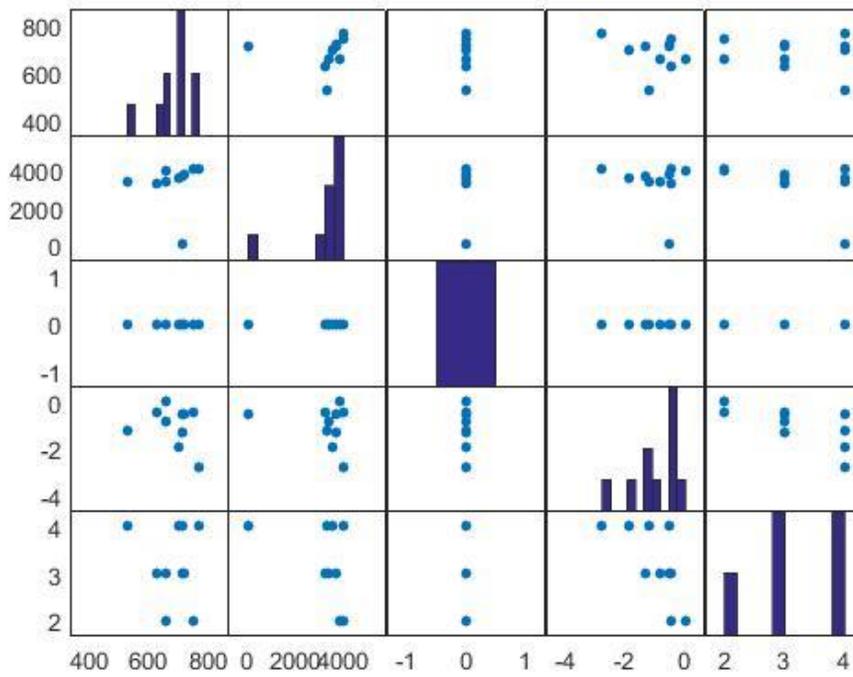


Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de prueba después del filtrado de variables.

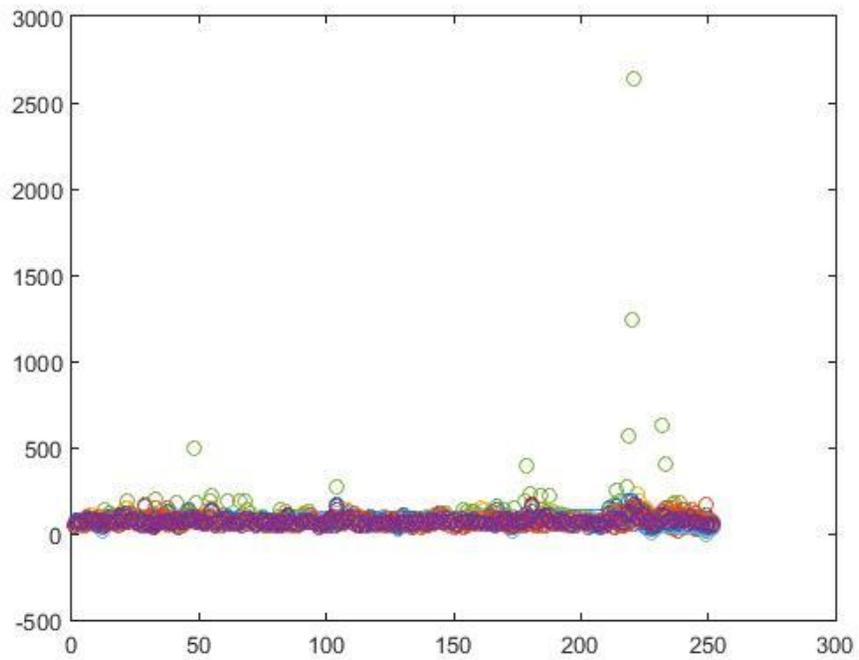
g) FE*****



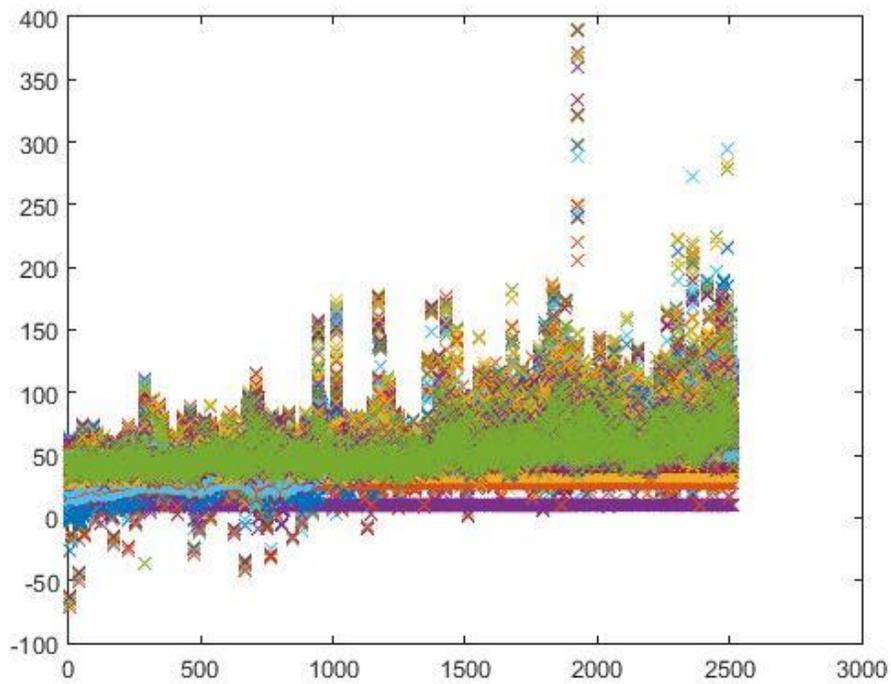
Pronóstico del valor/*stock* sobre el conjunto de entrenamiento antes del filtrado de variables.



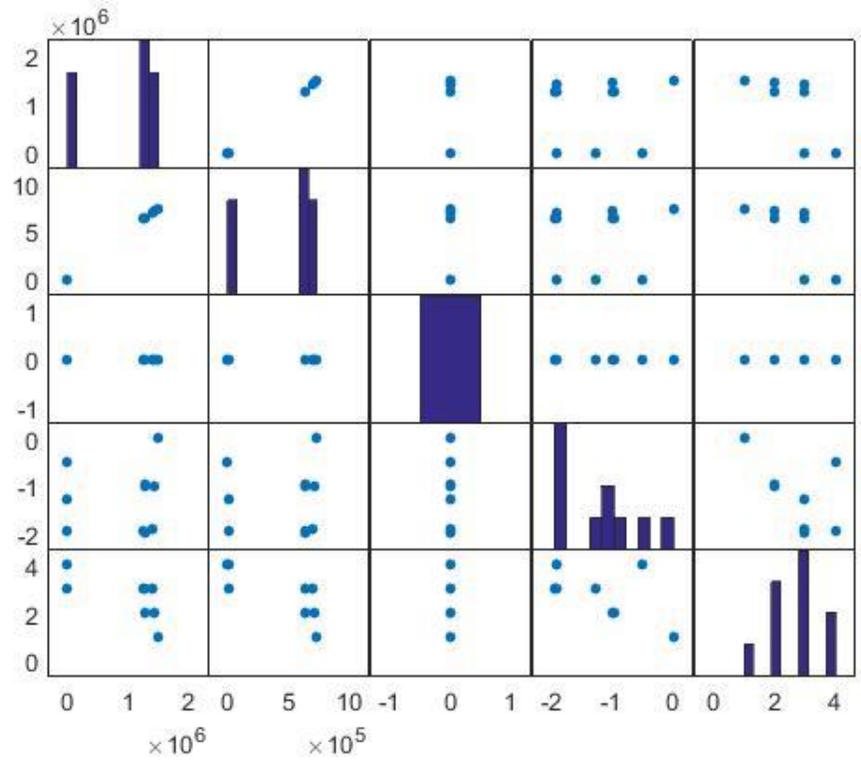
Frentes de Pareto de los objetivos del modelo antes del filtrado de variables



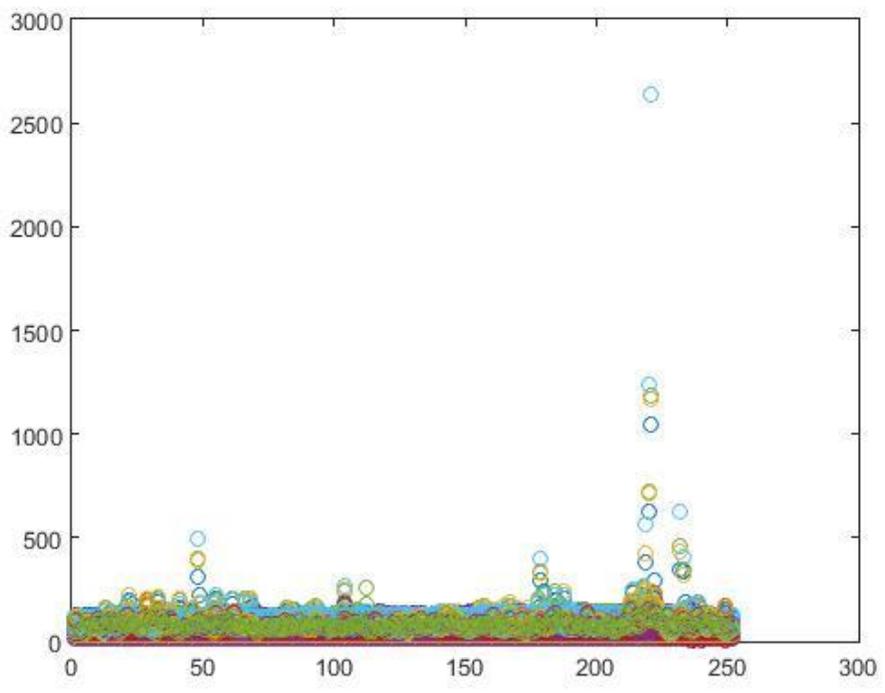
Pronóstico del valor/*stock* sobre el conjunto de prueba antes del filtrado de variables.



Pronóstico del valor/*stock* sobre el conjunto de entrenamiento después del filtrado de variables

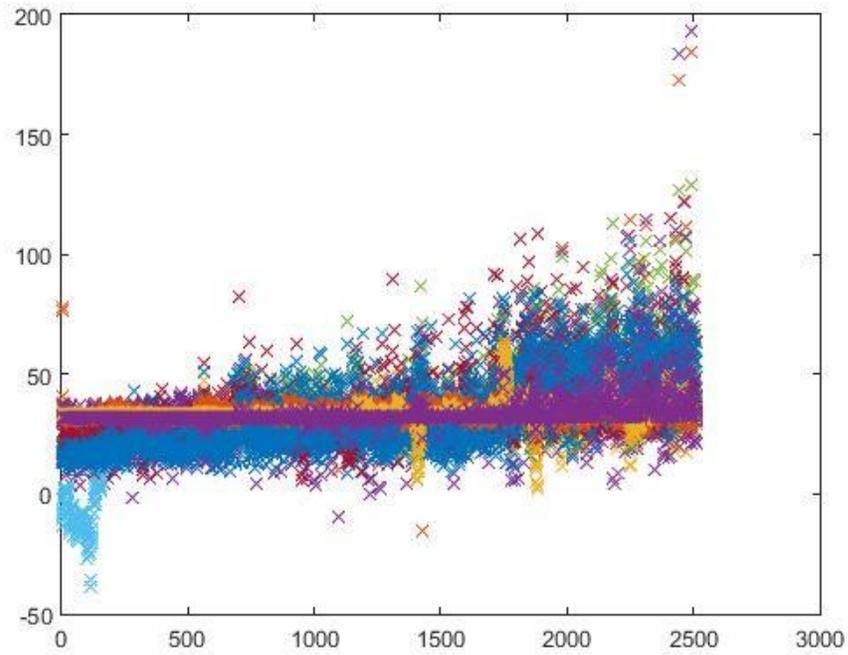


Frentes de Pareto de los objetivos del modelo después del filtrado de variables

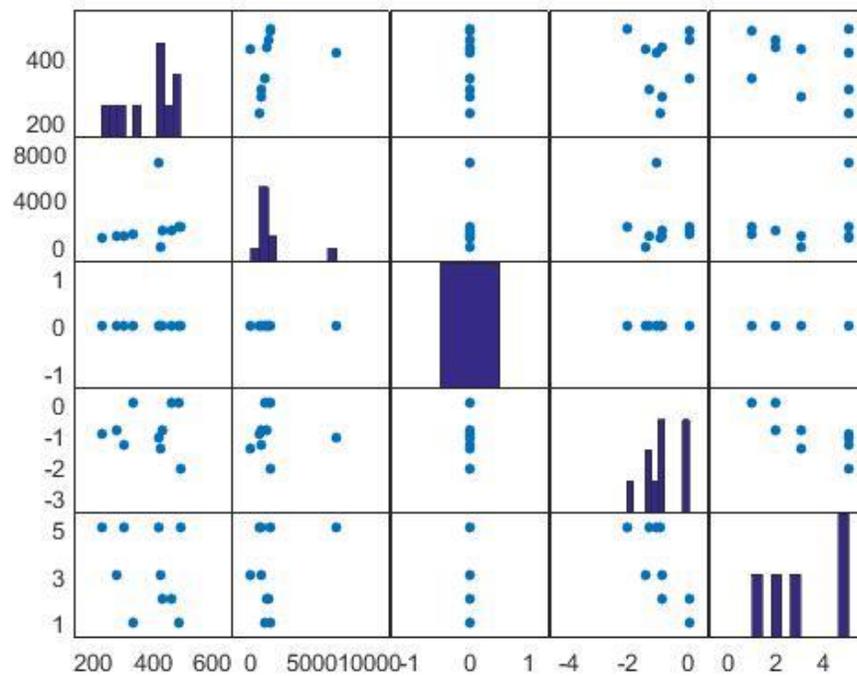


Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de prueba después del filtrado de variables.

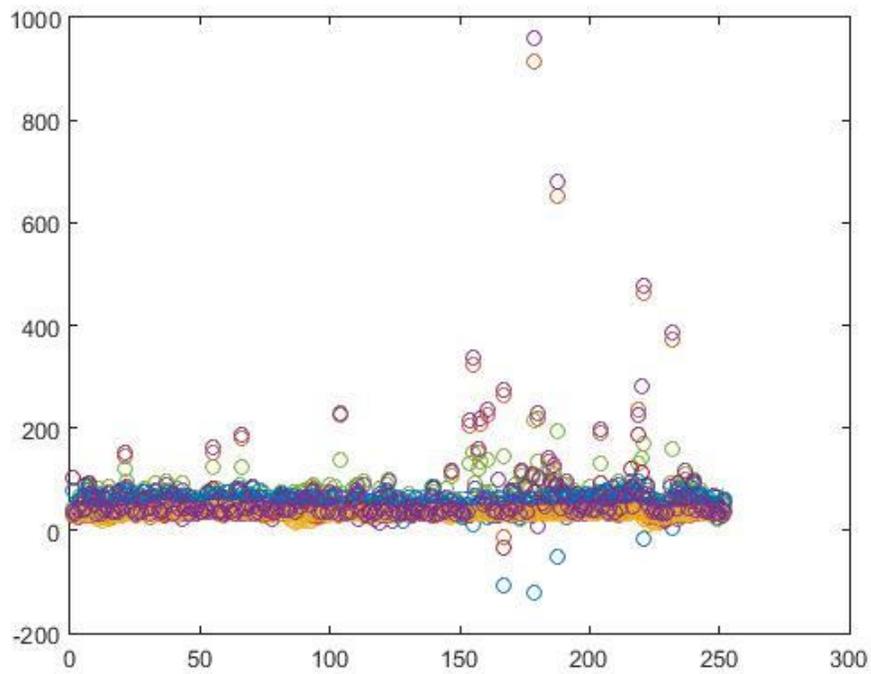
h) GC*****



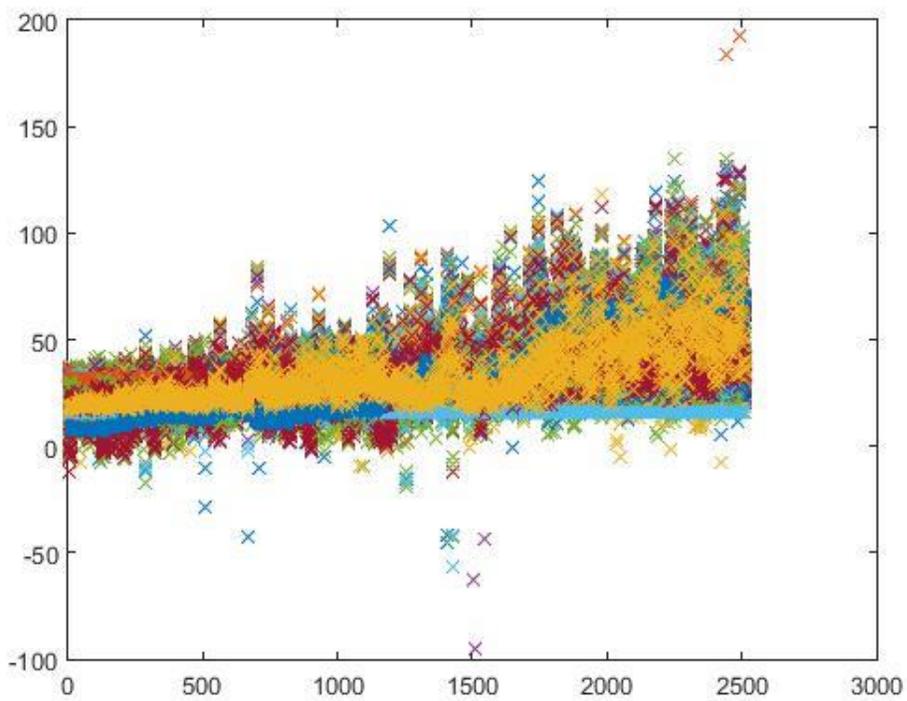
Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de entrenamiento antes del filtrado de variables.



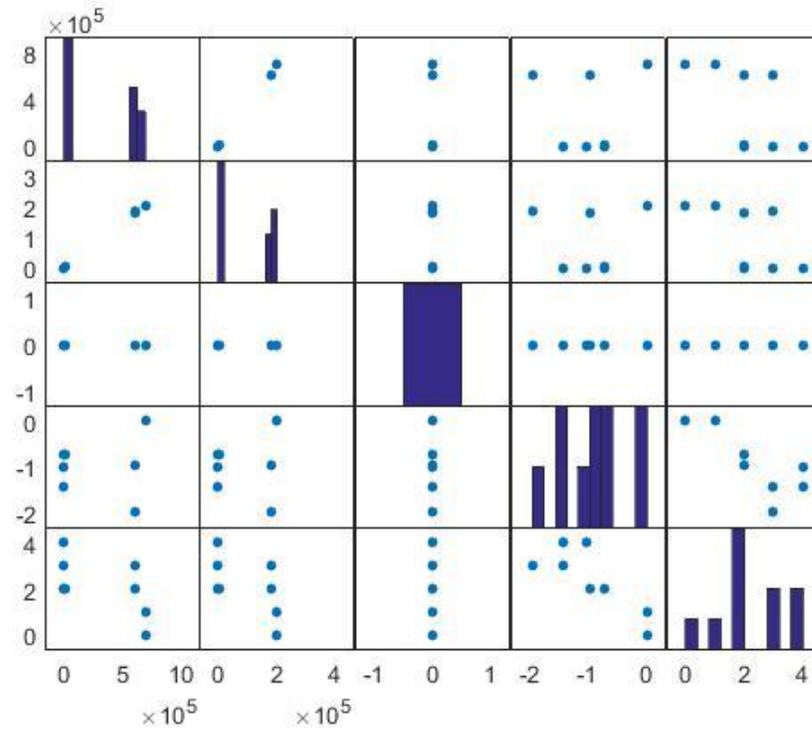
Frentes de Pareto de los objetivos del modelo antes del filtrado de variables



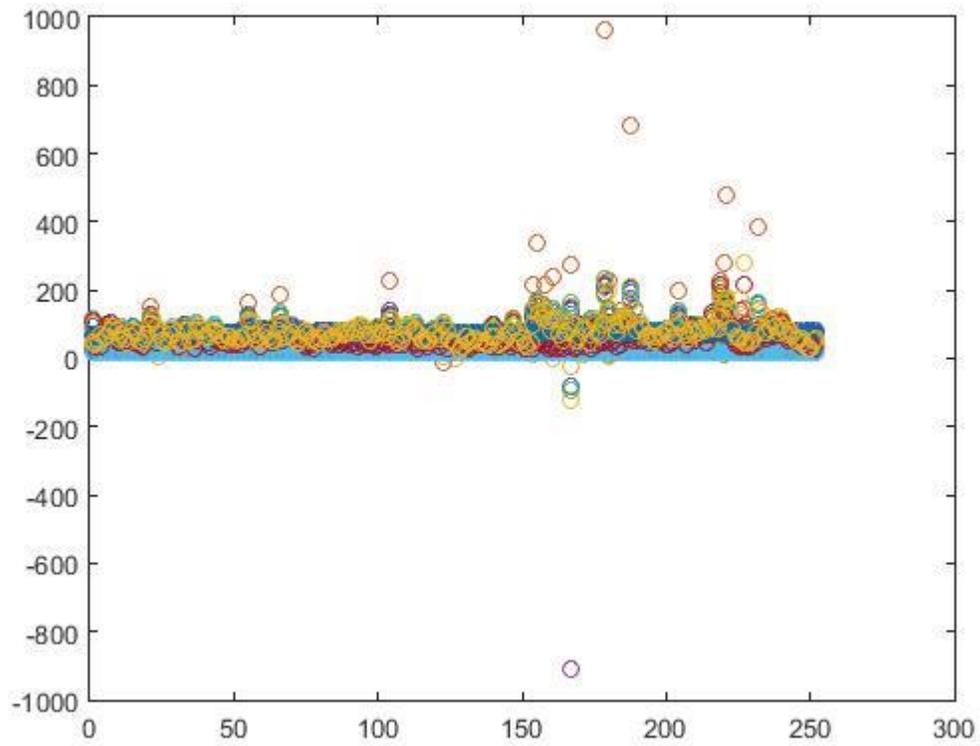
Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de prueba antes del filtrado de variables.



Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de entrenamiento después del filtrado de variables

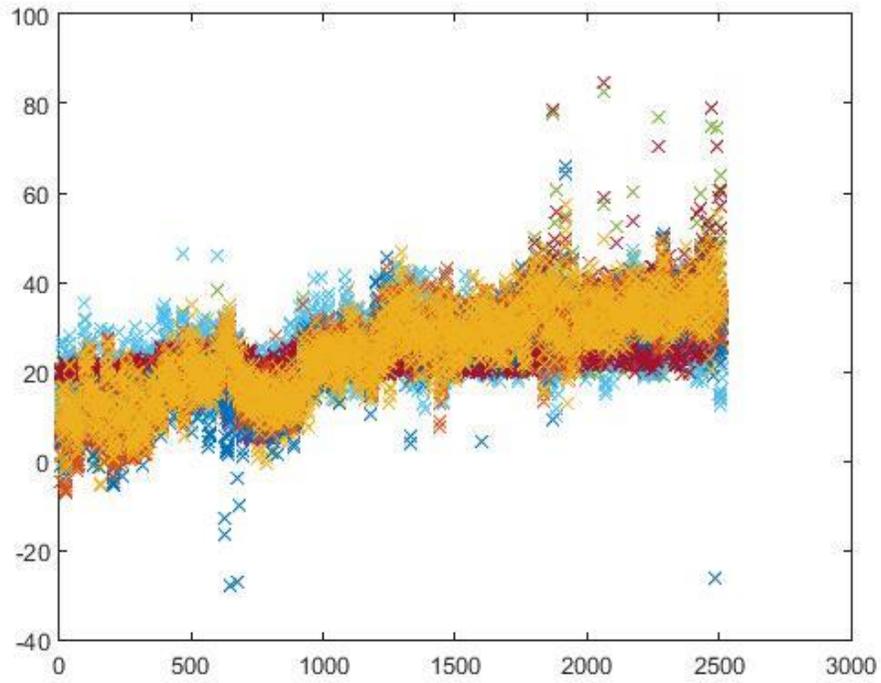


Frentes de Pareto de los objetivos del modelo después del filtrado de variables

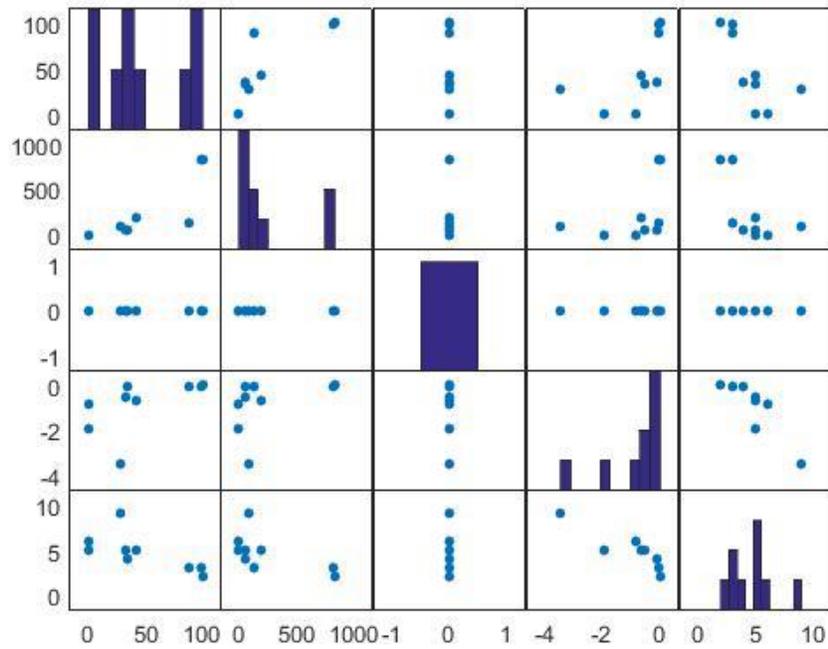


Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de prueba después del filtrado de variables.

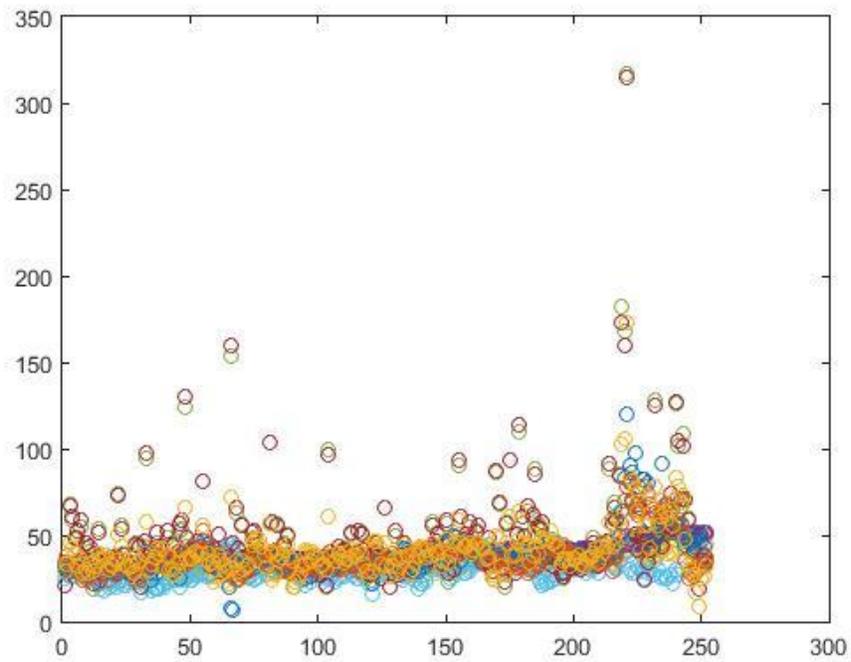
i) GM*****



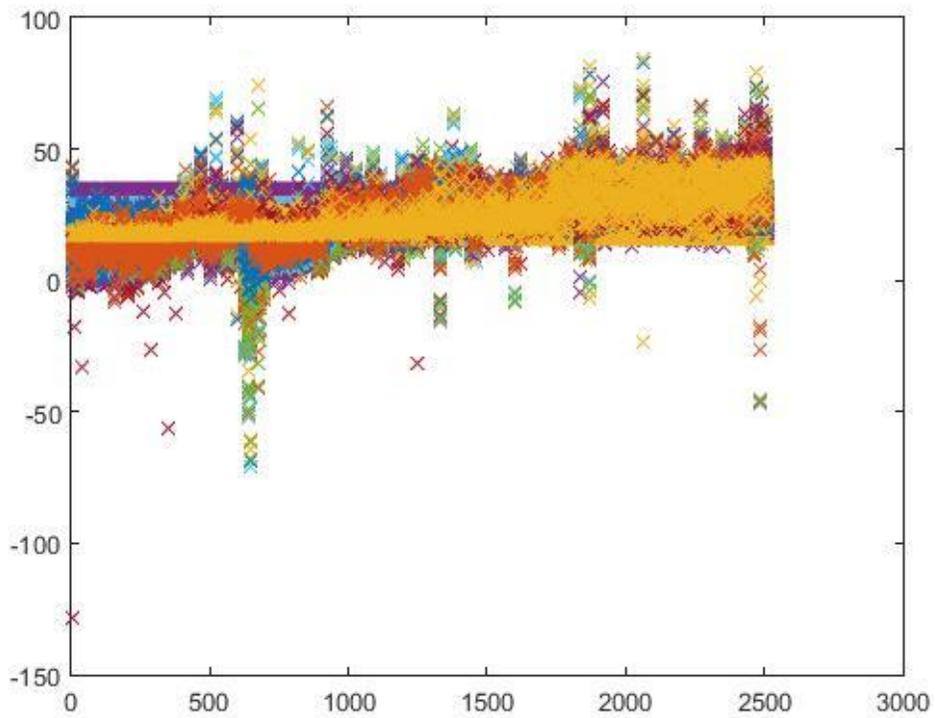
Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de entrenamiento antes del filtrado de variables.



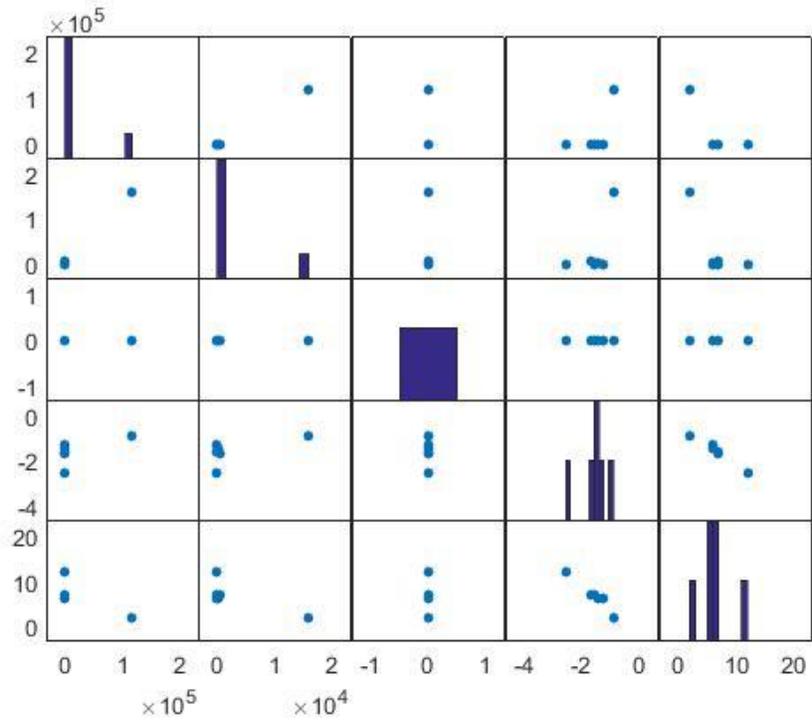
Frentes de Pareto de los objetivos del modelo antes del filtrado de variables



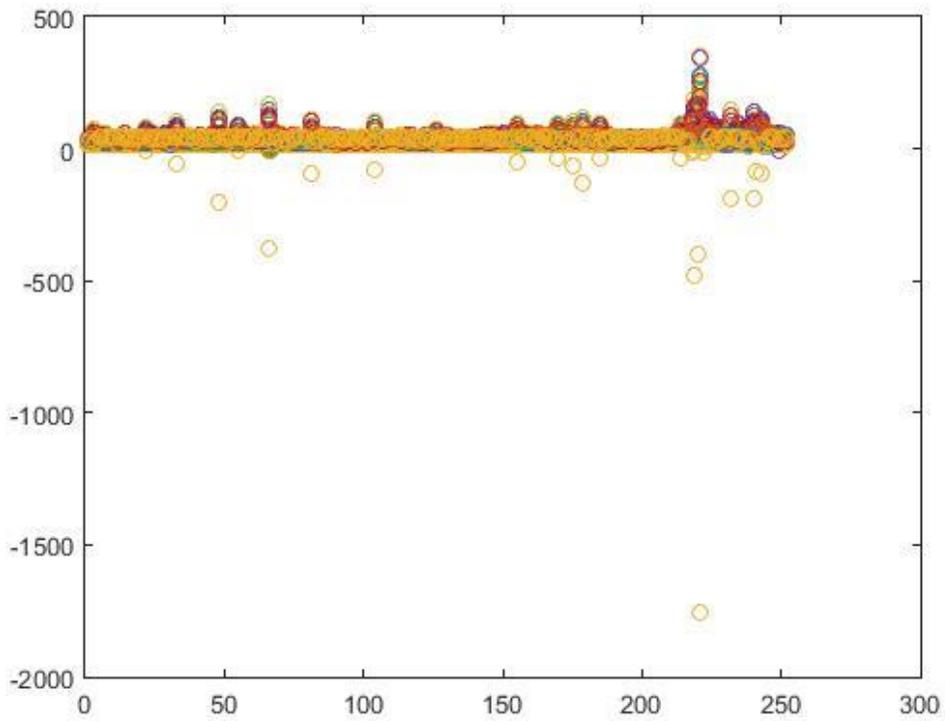
Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de prueba antes del filtrado de variables.



Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de entrenamiento después del filtrado de variables

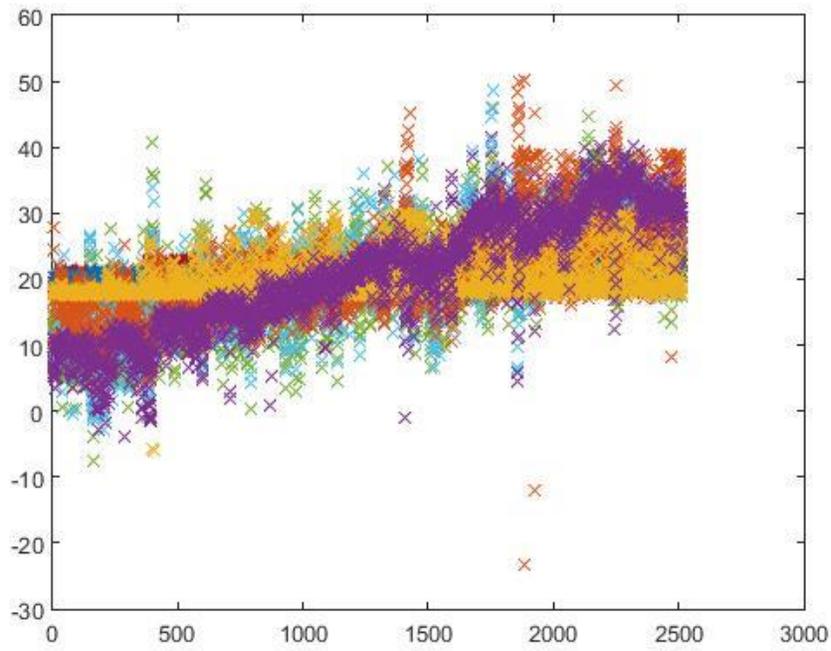


Frentes de Pareto de los objetivos del modelo después del filtrado de variables

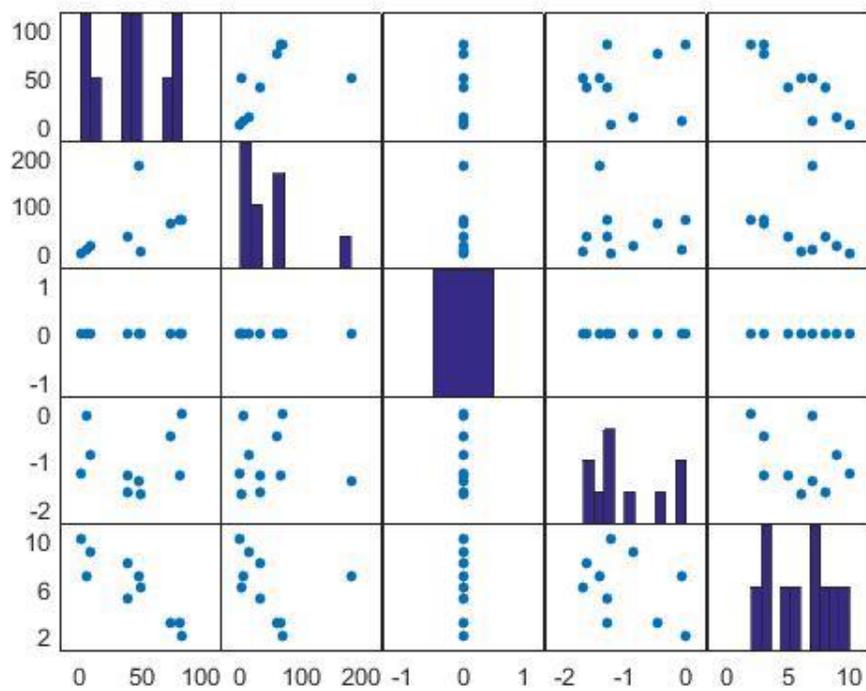


Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de prueba después del filtrado de variables.

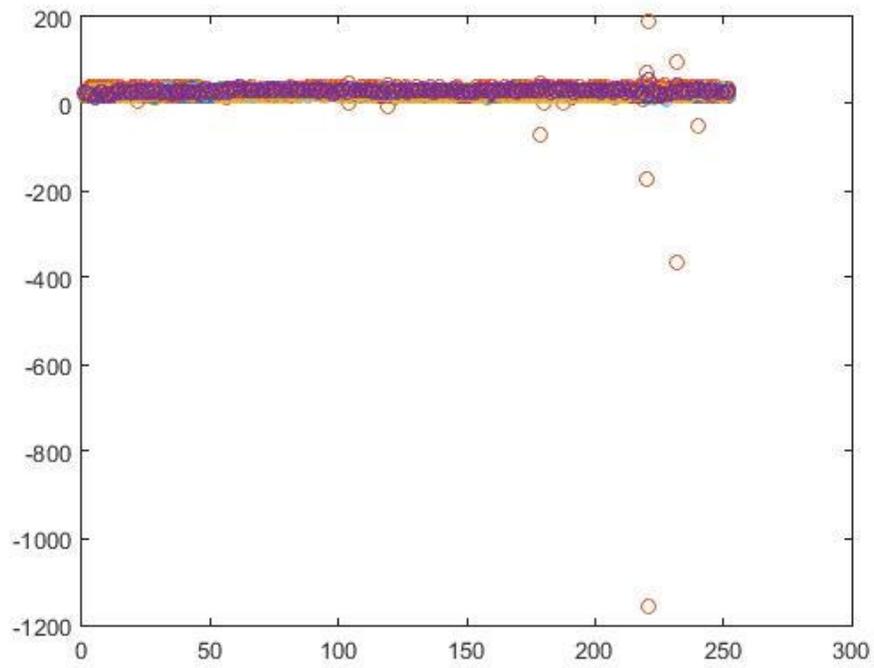
j) GFI****



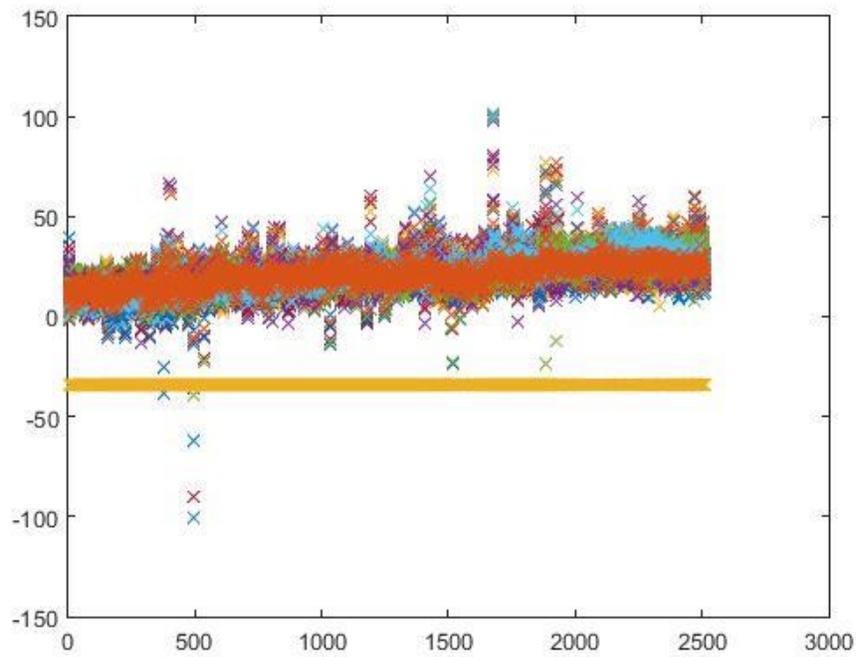
Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de entrenamiento antes del filtrado de variables.



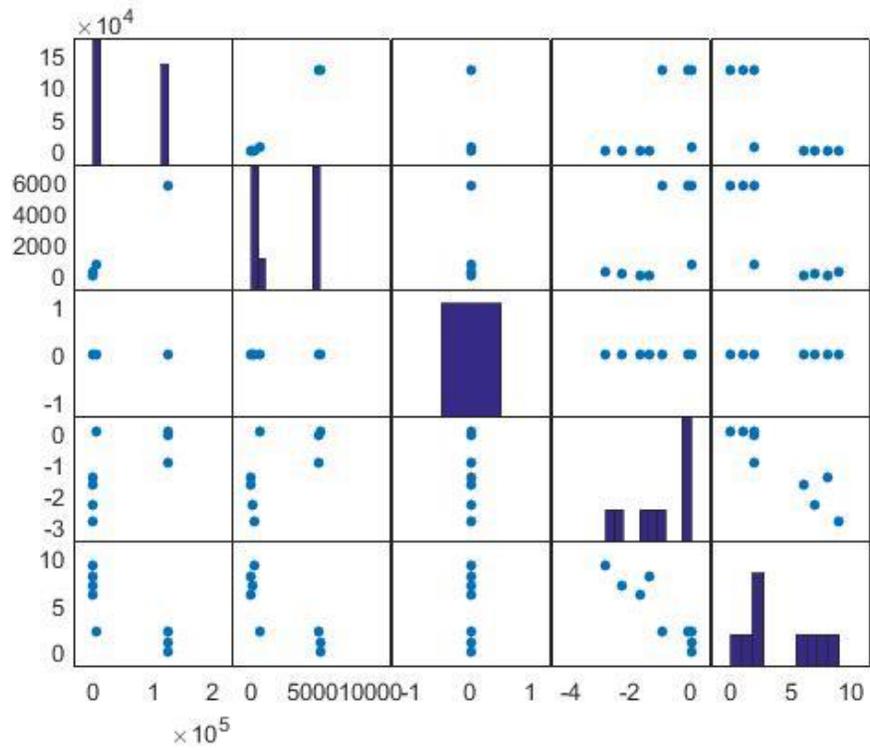
Frentes de Pareto de los objetivos del modelo antes del filtrado de variables



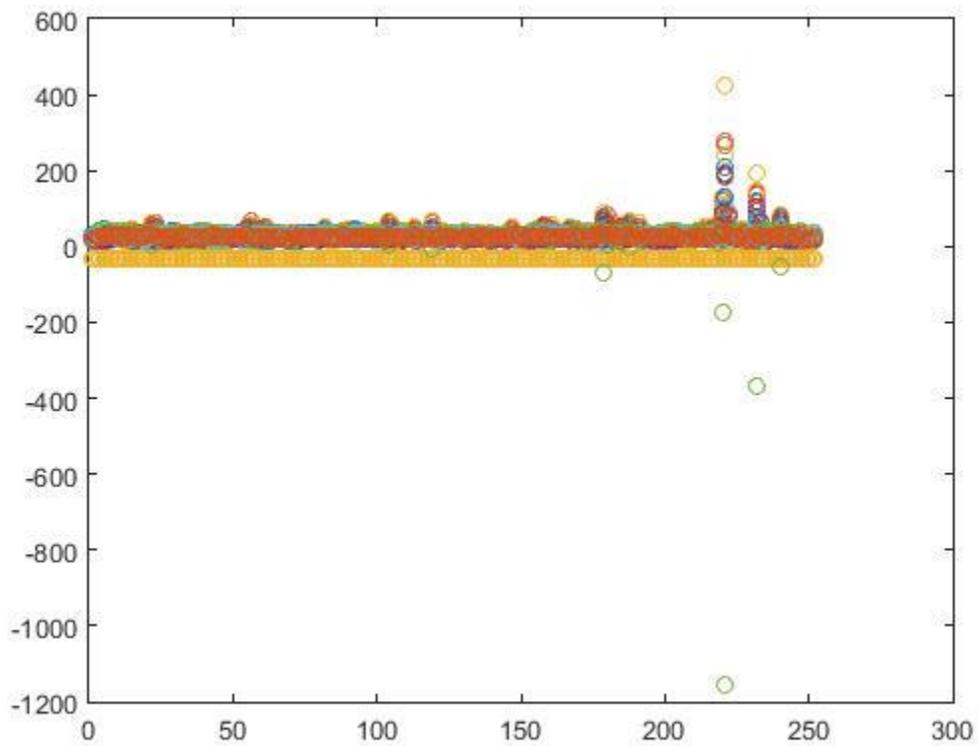
Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de prueba antes del filtrado de variables.



Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de entrenamiento después del filtrado de variables

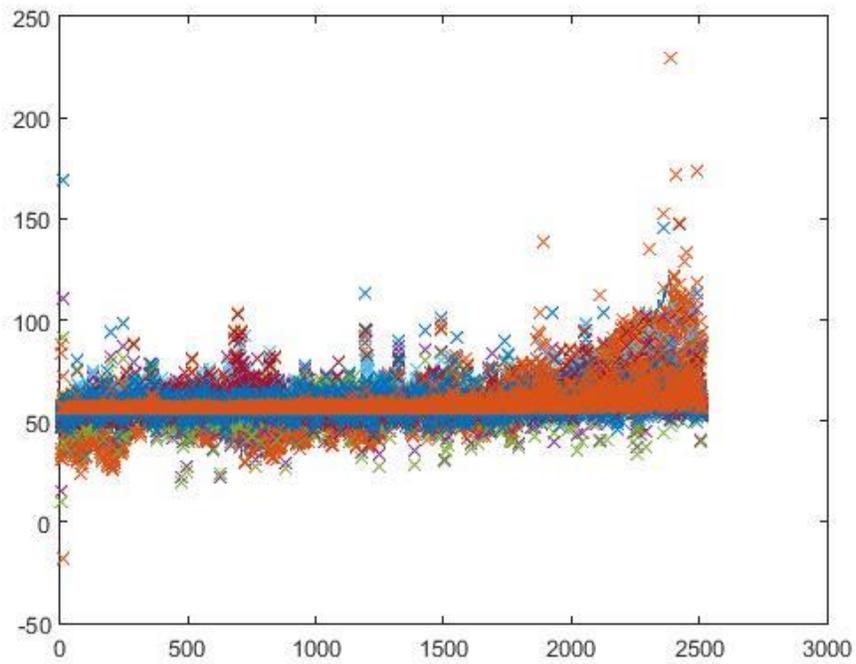


Frentes de Pareto de los objetivos del modelo después del filtrado de variables

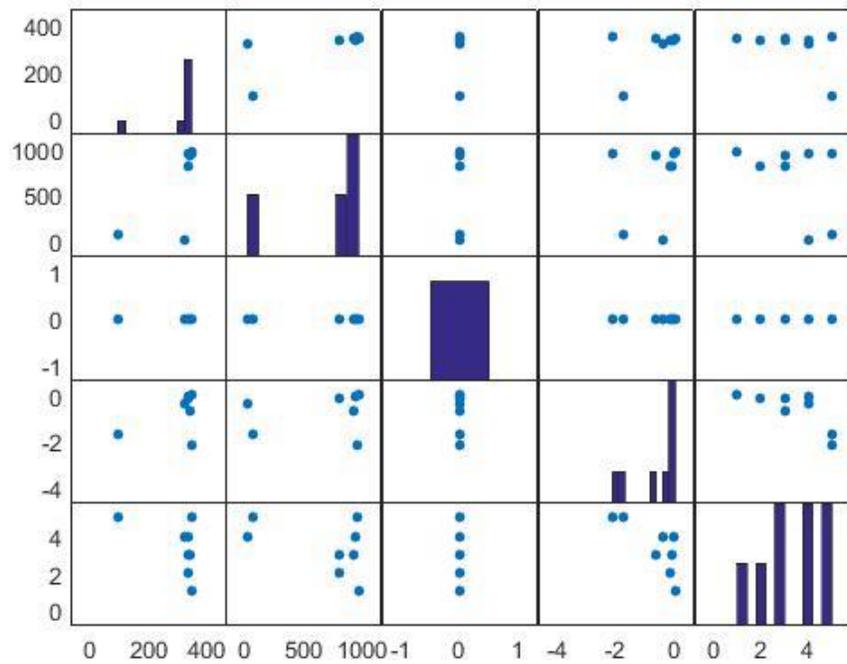


Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de prueba después del filtrado de variables.

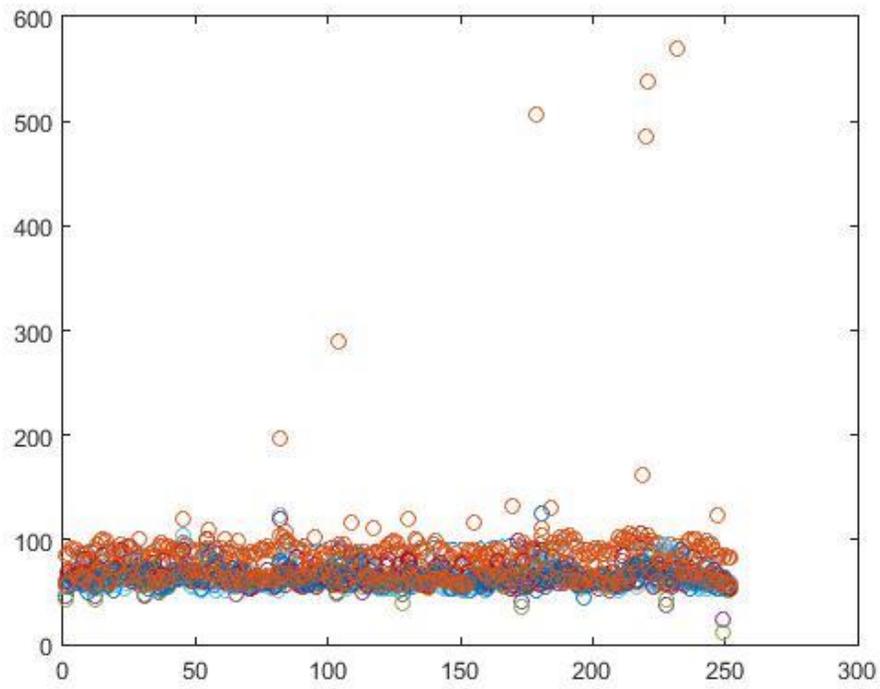
k) TL*****



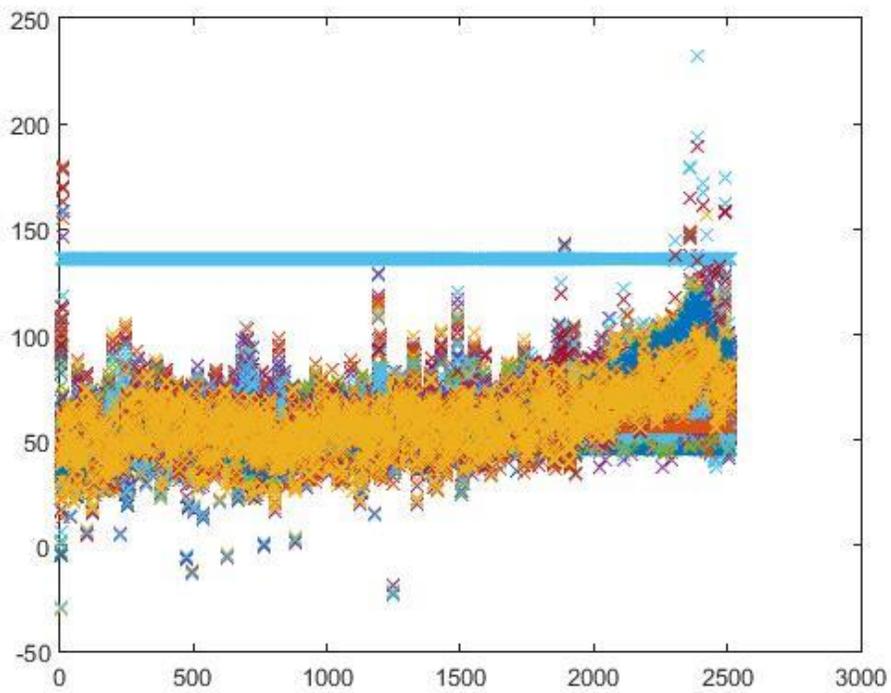
Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de entrenamiento antes del filtrado de variables.



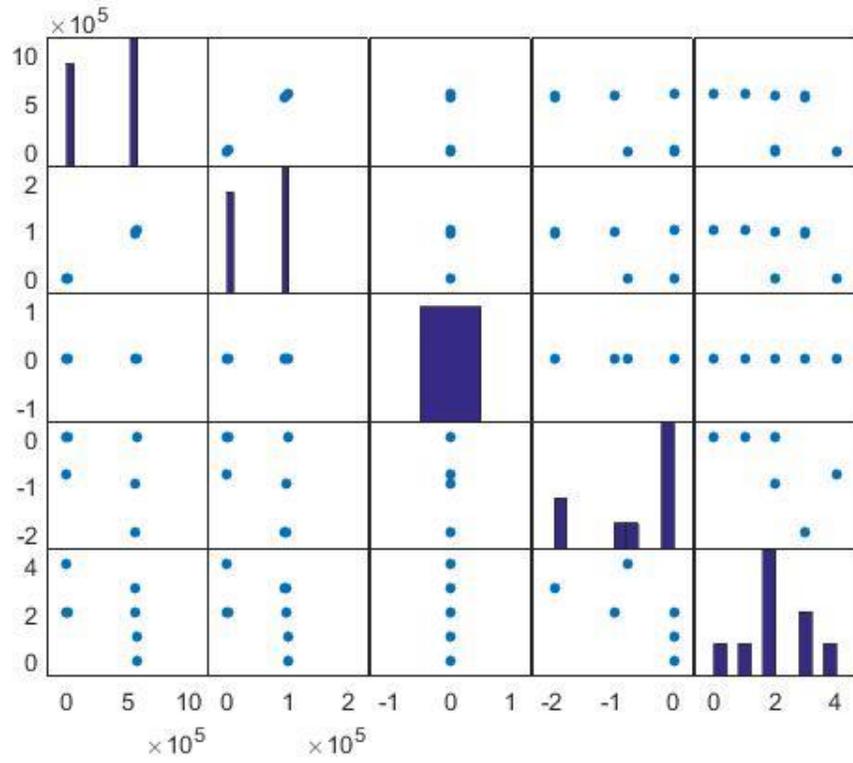
Frentes de Pareto de los objetivos del modelo antes del filtrado de variables



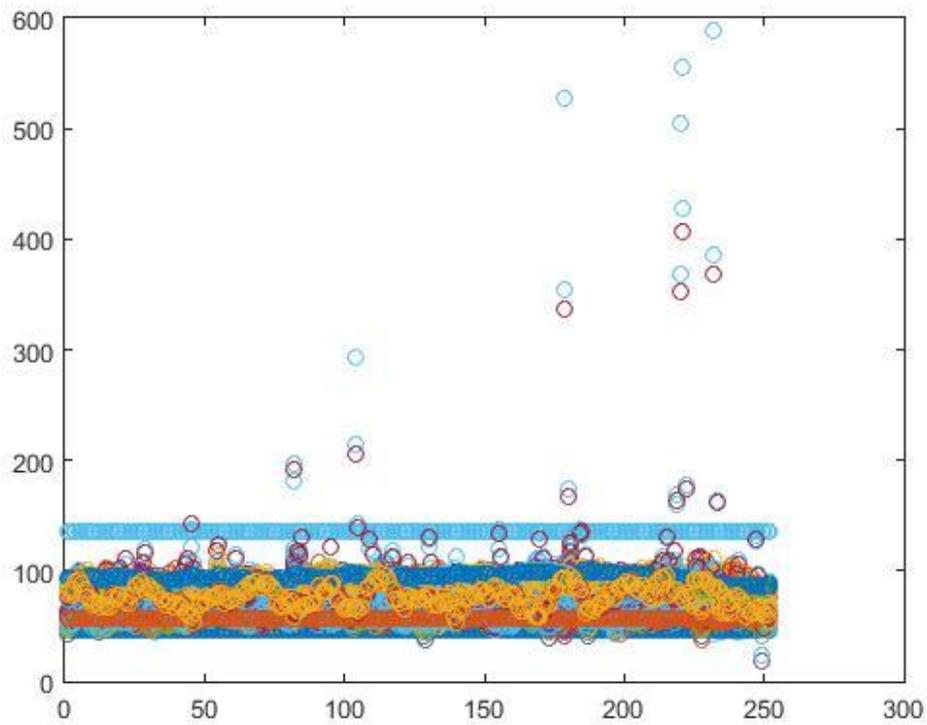
Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de prueba antes del filtrado de variables.



Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de entrenamiento después del filtrado de variables

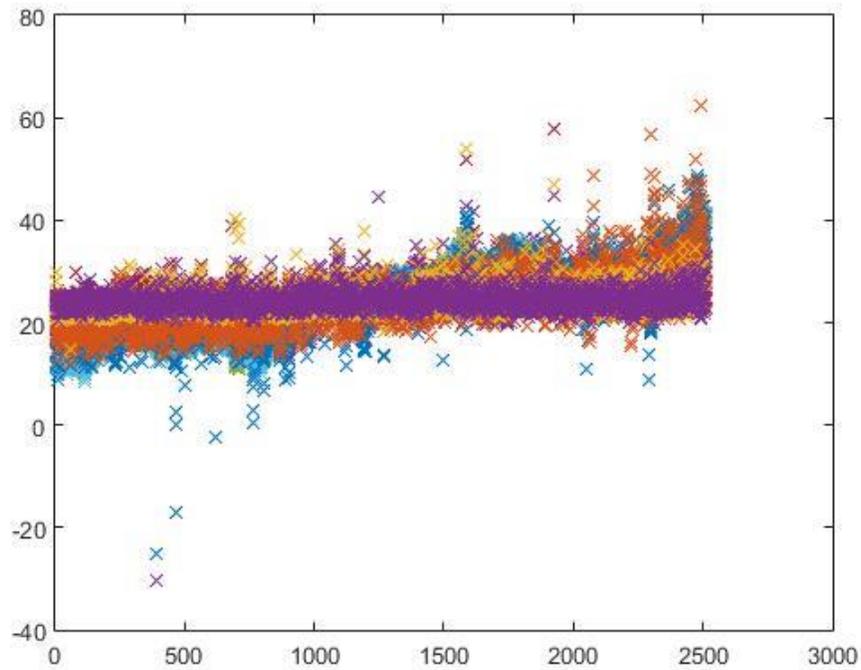


Frentes de Pareto de los objetivos del modelo después del filtrado de variables

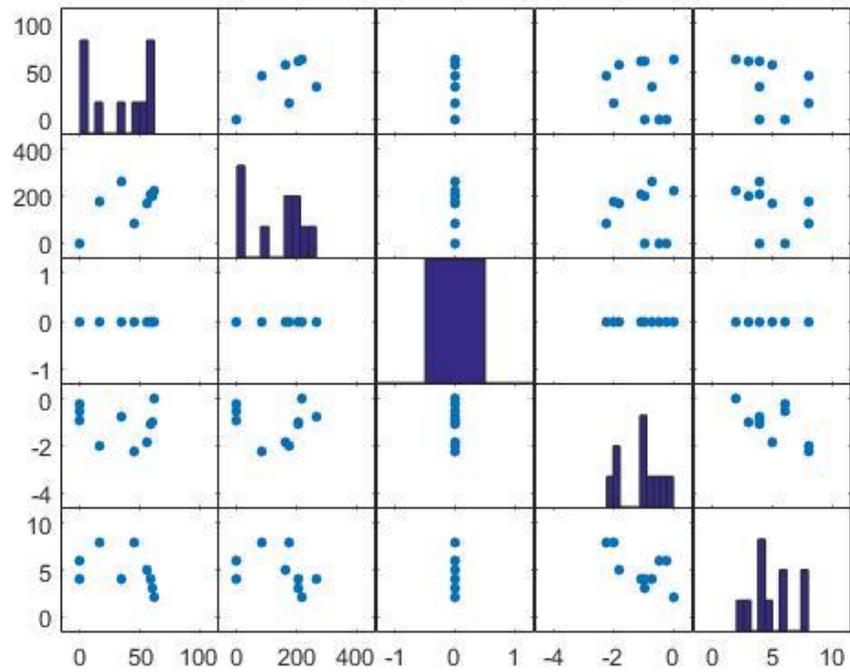


Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de prueba después del filtrado de variables.

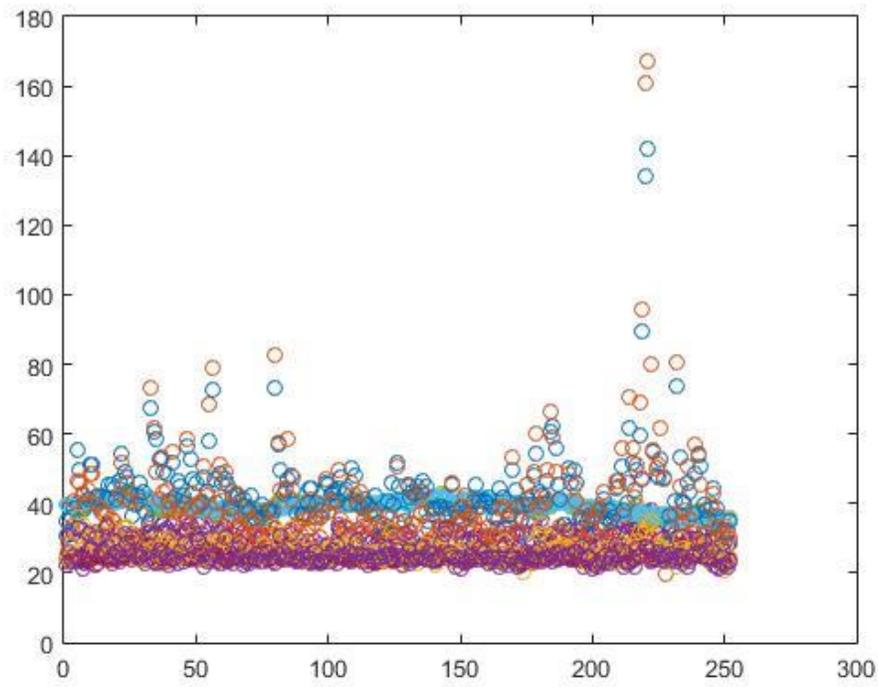
I) WA****



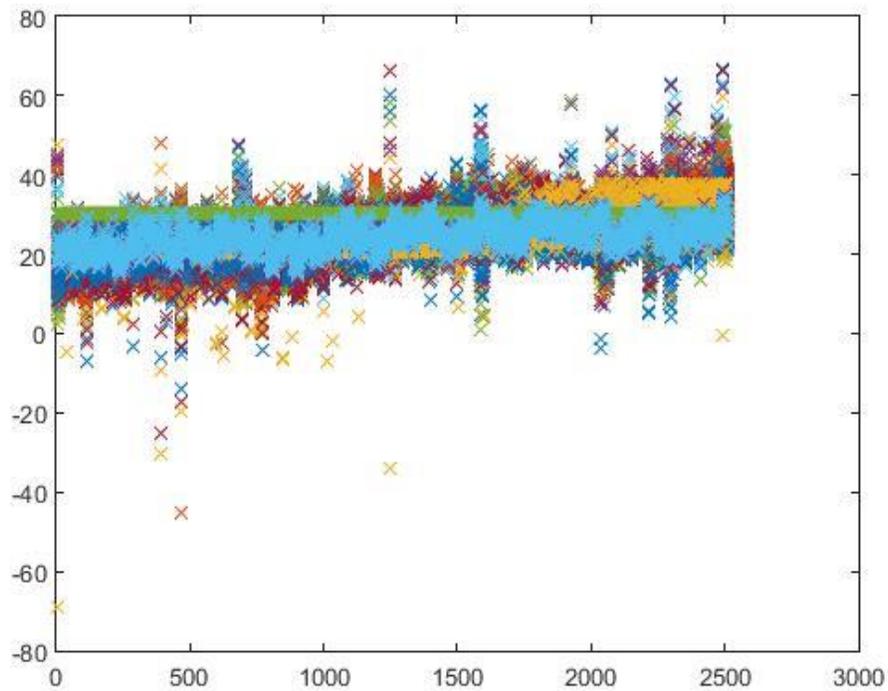
Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de entrenamiento antes del filtrado de variables.



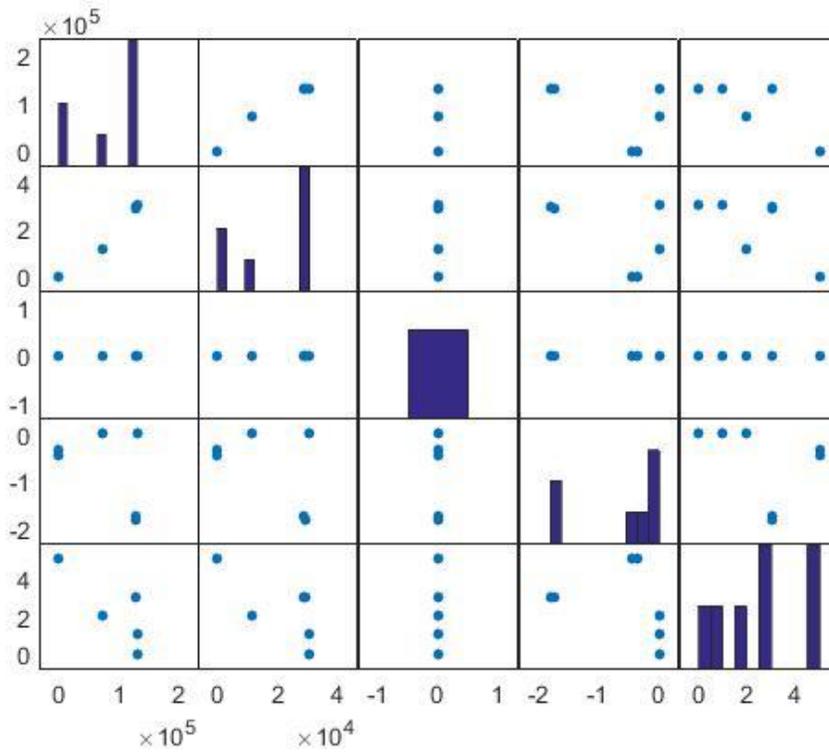
Frentes de Pareto de los objetivos del modelo antes del filtrado de variables



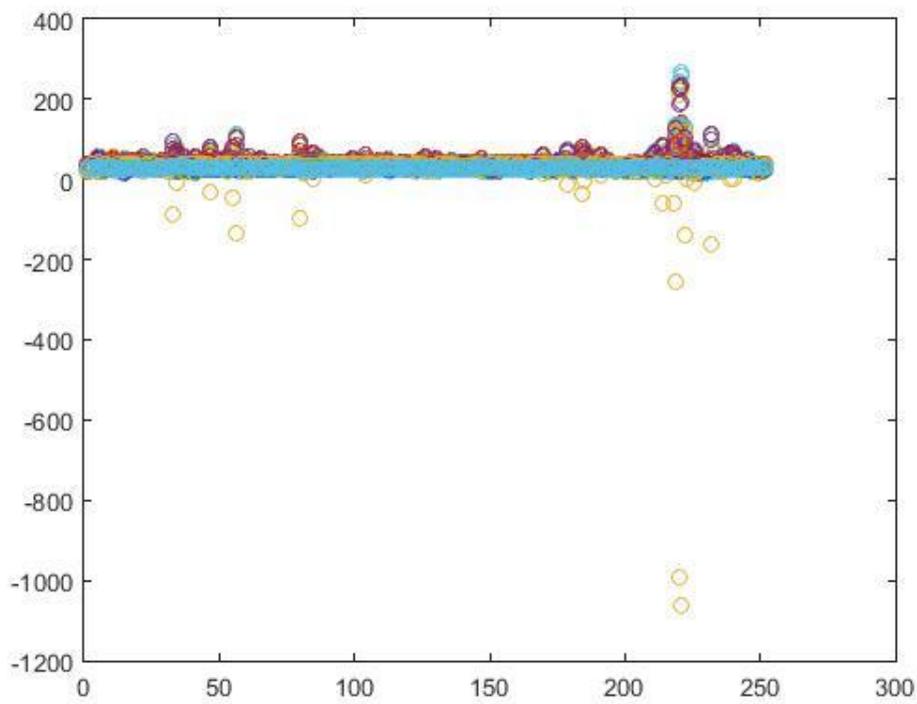
Pronóstico del valor/*stock* sobre el conjunto de prueba antes del filtrado de variables.



Pronóstico del valor/*stock* sobre el conjunto de entrenamiento después del filtrado de variables



Frentes de Pareto de los objetivos del modelo después del filtrado de variables

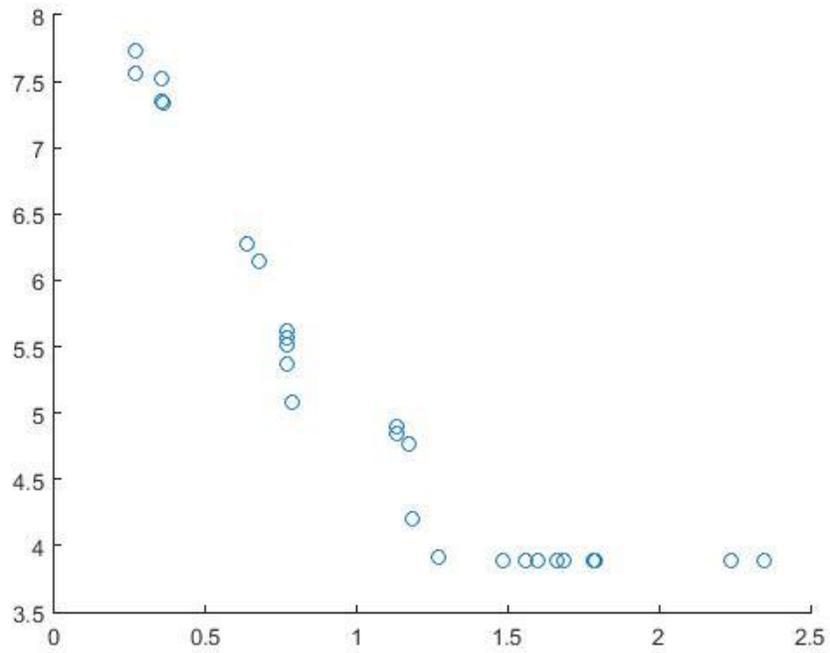


Pronóstico del valor/stock sobre el conjunto de prueba después del filtrado de variables.

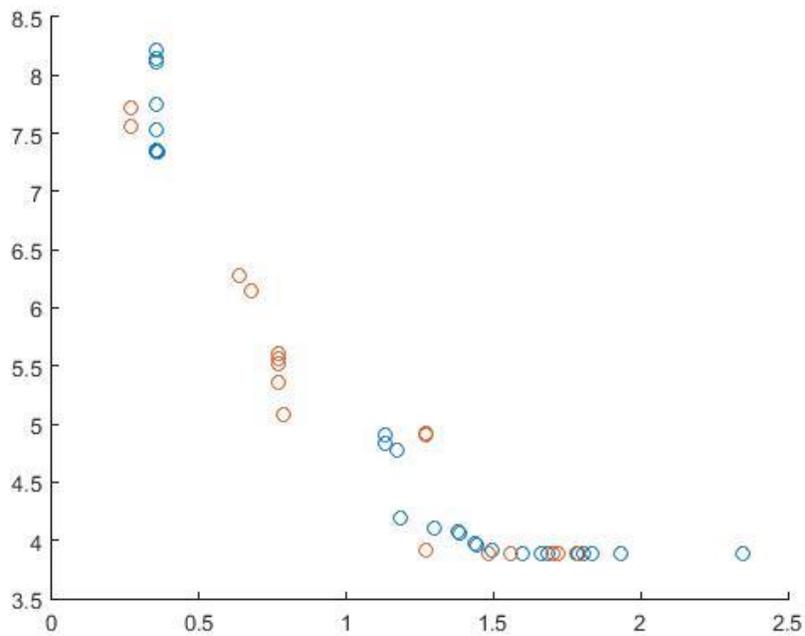
ANEXO 2

Resultados Heurísticas

a) AL***

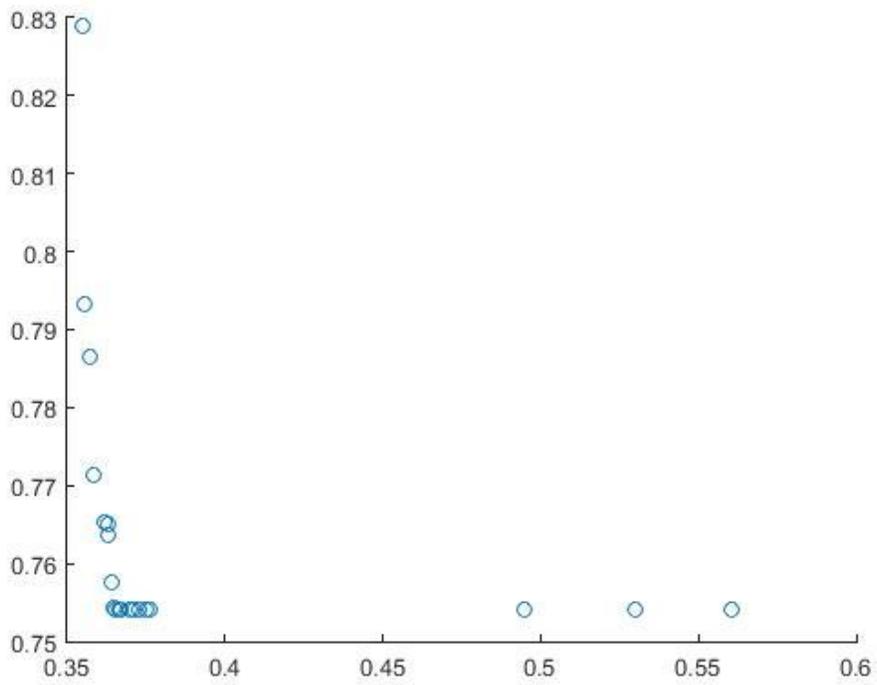


Frente de Pareto del modelo con Algoritmos Genéticos

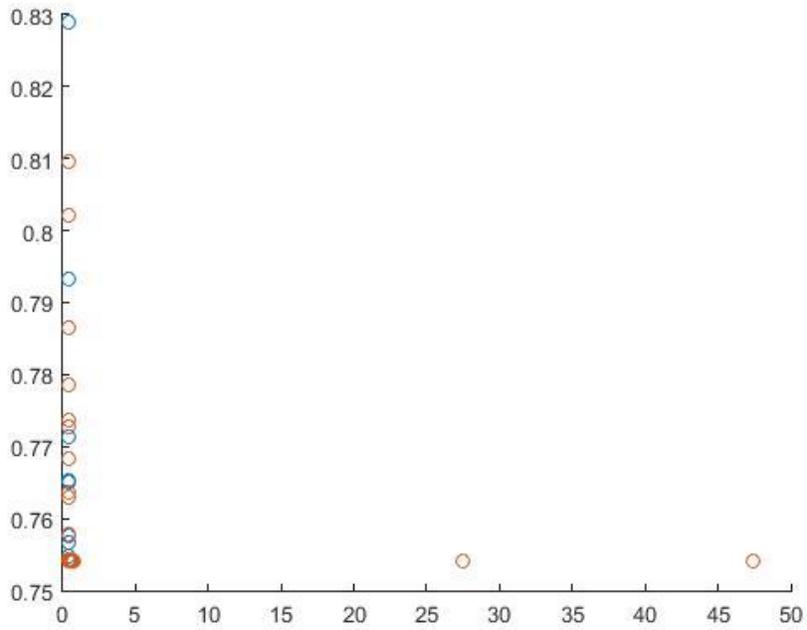


Frente de Pareto del modelo con Búsqueda Armónica

b) AM**

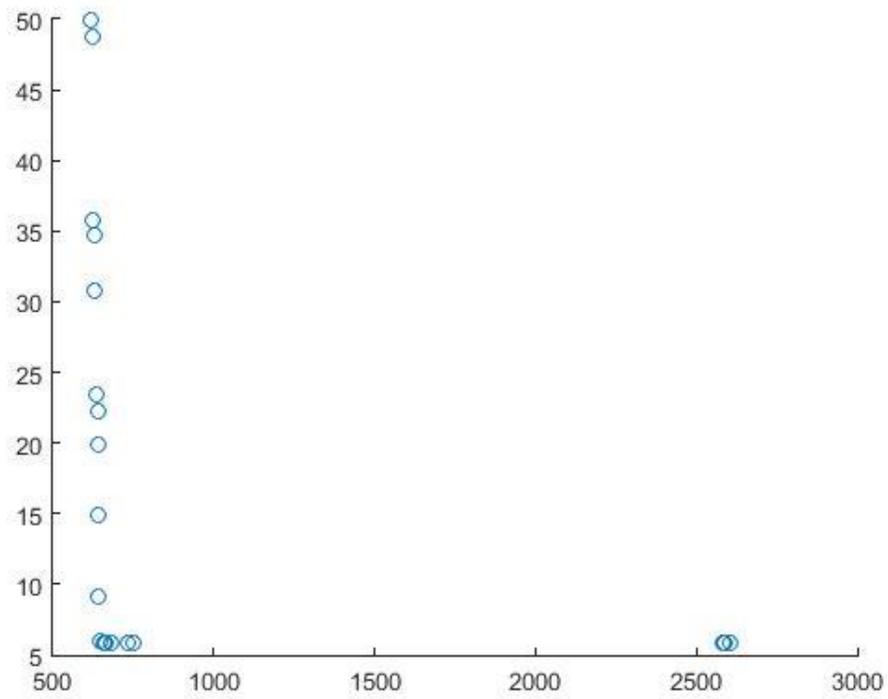


Frente de Pareto del modelo con Algoritmos Genéticos

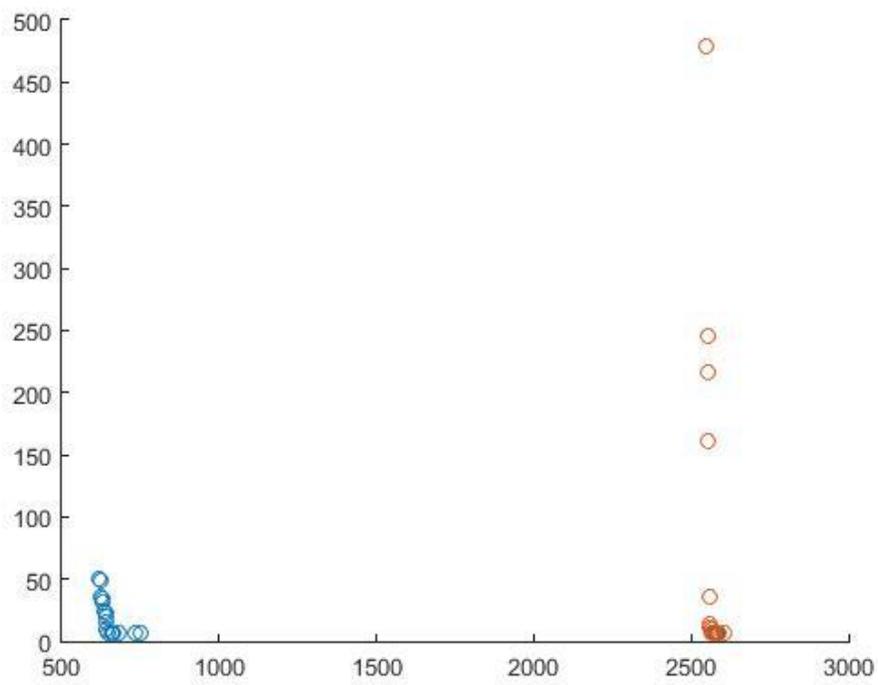


Frente de Pareto del modelo con Búsqueda Armónica

c) GFN****

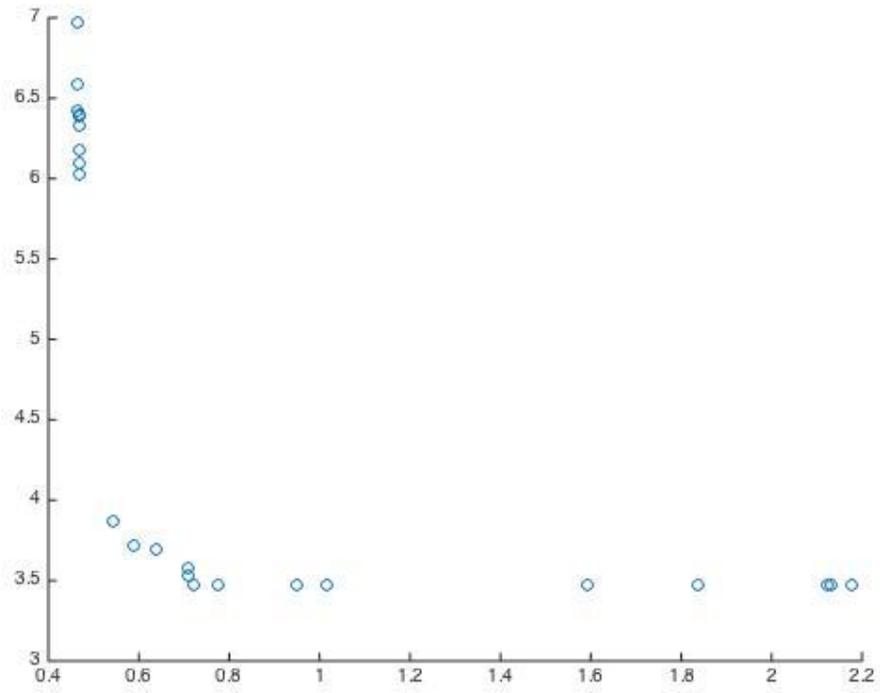


Frente de Pareto del modelo con Algoritmos Genéticos

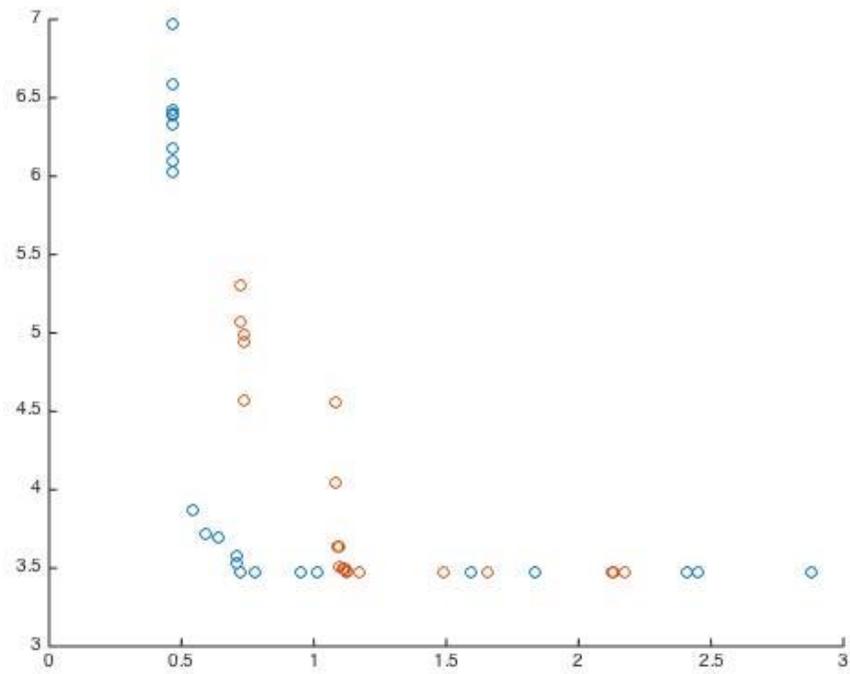


Frente de Pareto del modelo con Búsqueda Armónica

d) BI****

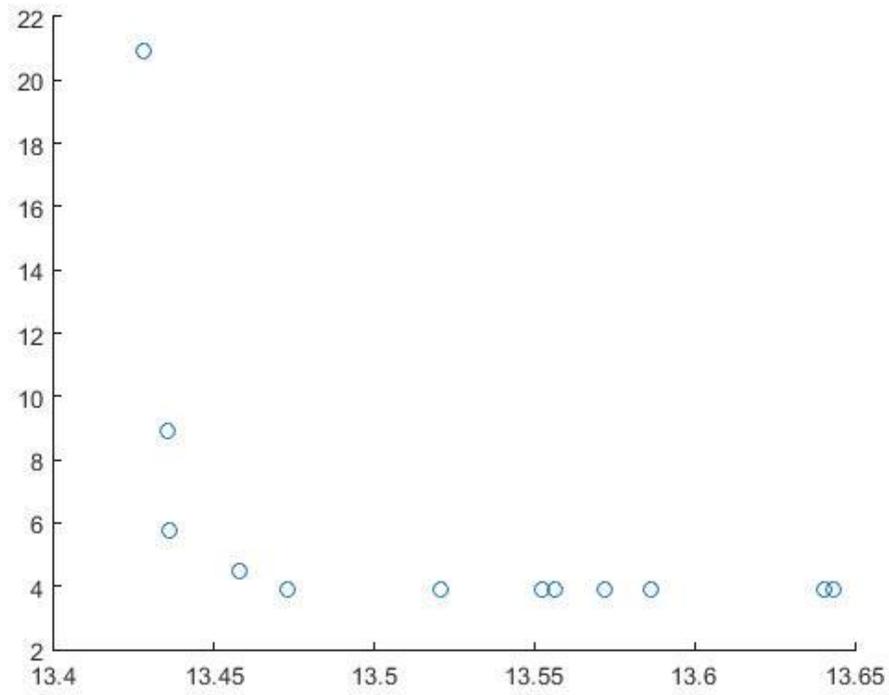


Frente de Pareto del modelo con Algoritmos Genéticos

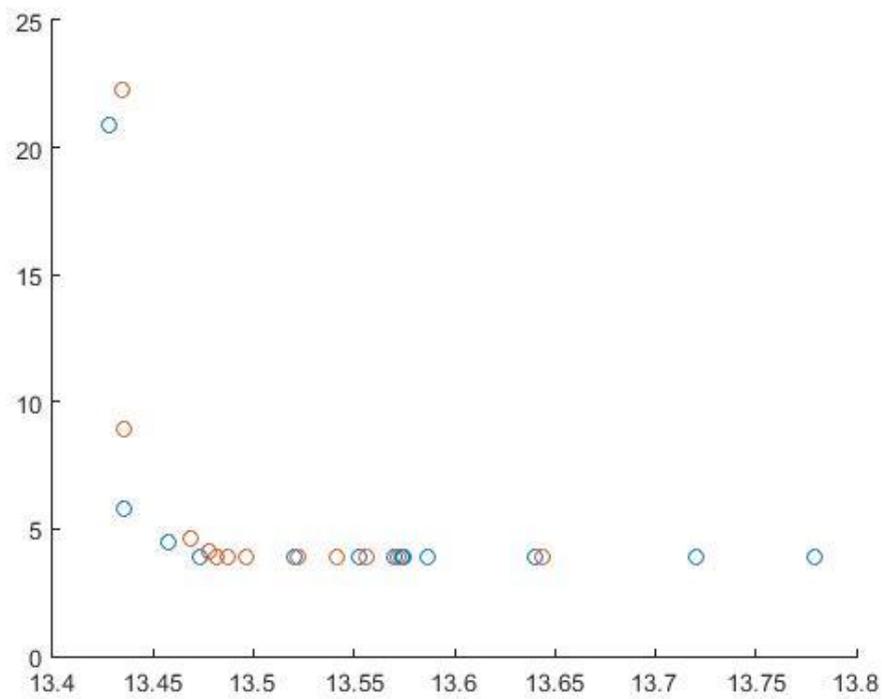


Frente de Pareto del modelo con Búsqueda Armónica

e) GC*****

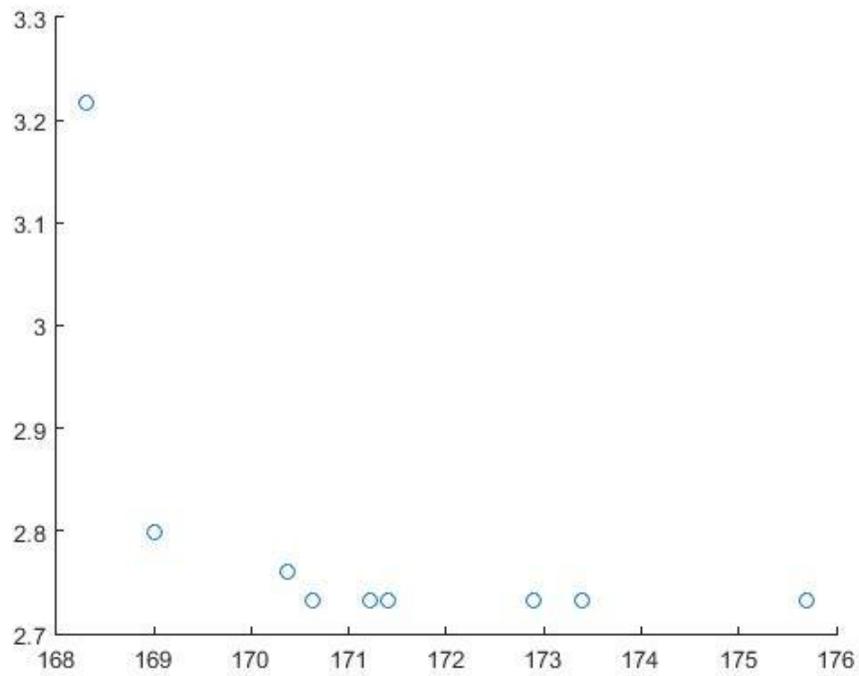


Frente de Pareto del modelo con Algoritmos Genéticos

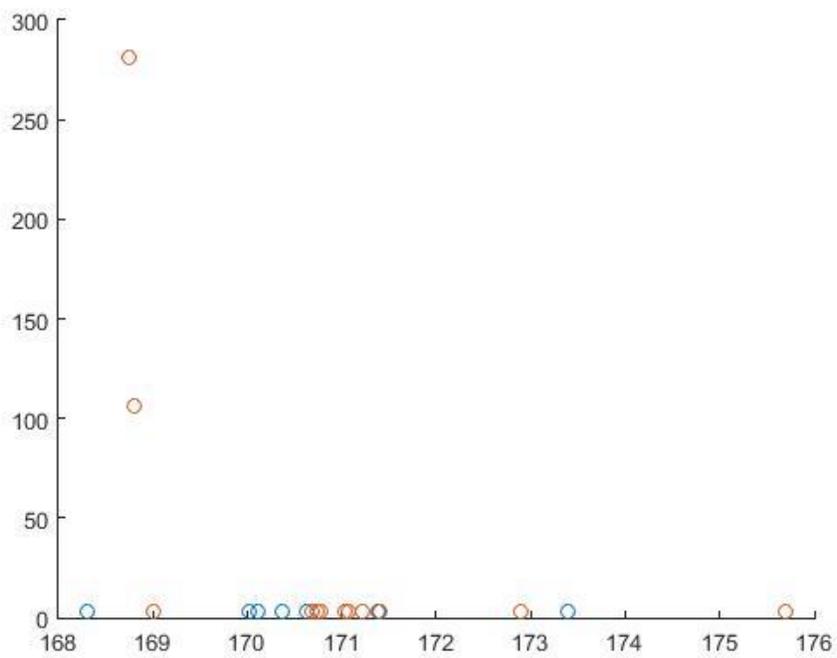


Frente de Pareto del modelo con Búsqueda Armónica

f) CE*****

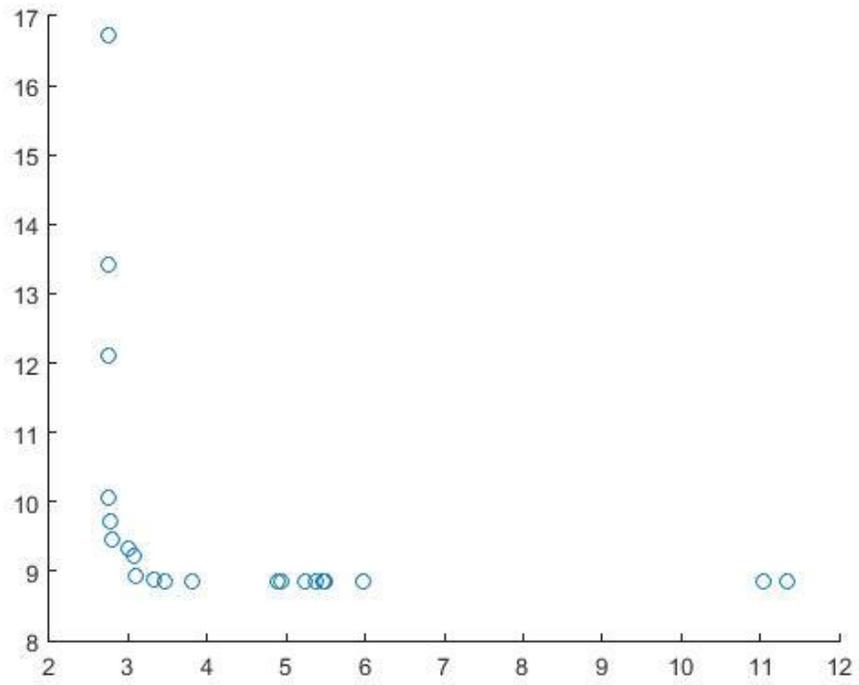


Frente de Pareto del modelo con Algoritmos Genéticos

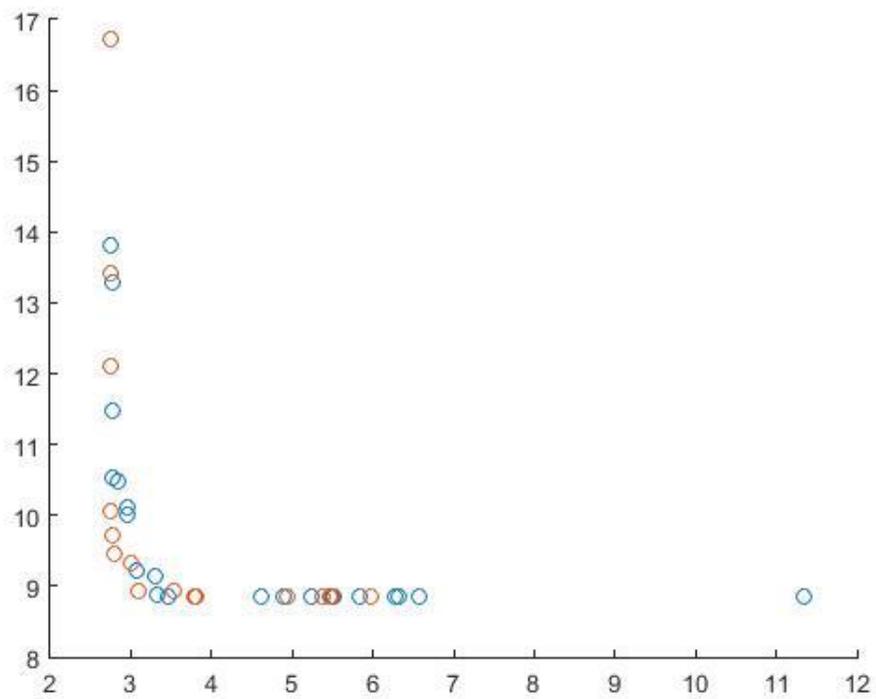


Frente de Pareto del modelo con Búsqueda Armónica

g) CO*****

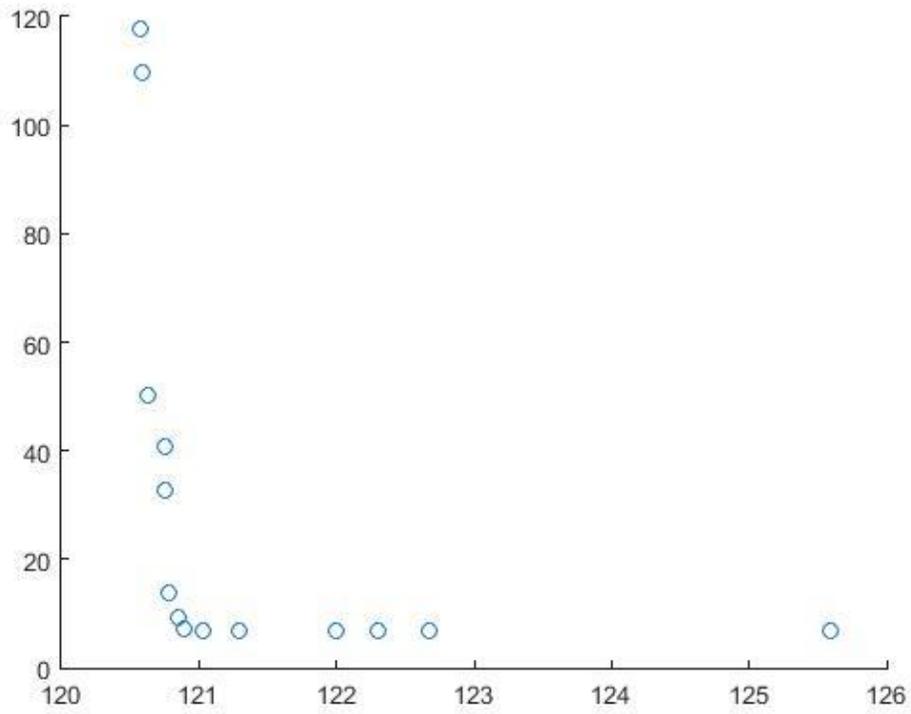


Frente de Pareto del modelo con Algoritmos Genéticos

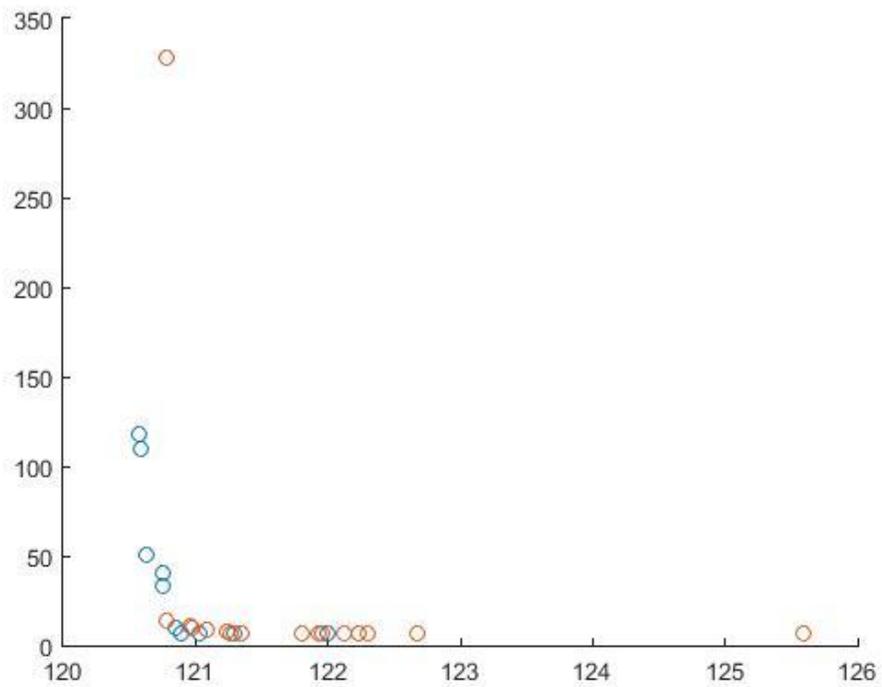


Frente de Pareto del modelo con Búsqueda Armónica

h) FE*****

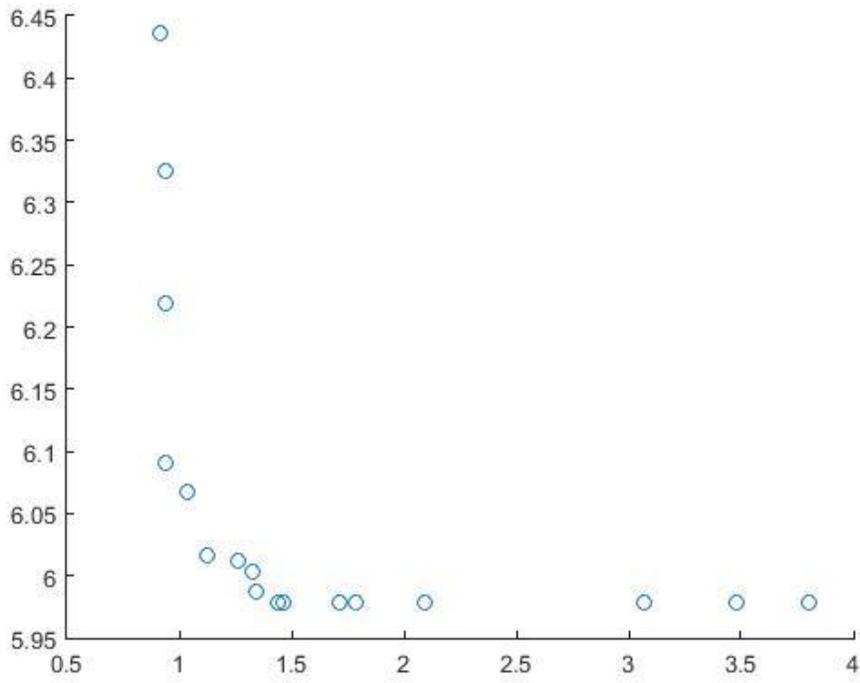


Frente de Pareto del modelo con Algoritmos Genéticos

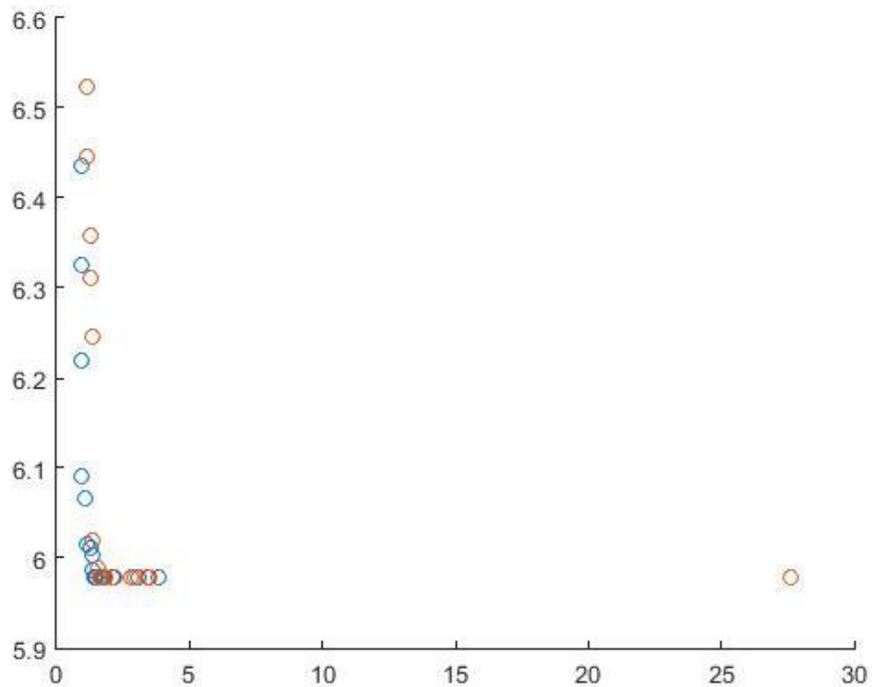


Frente de Pareto del modelo con Búsqueda Armónica

i) GM*****

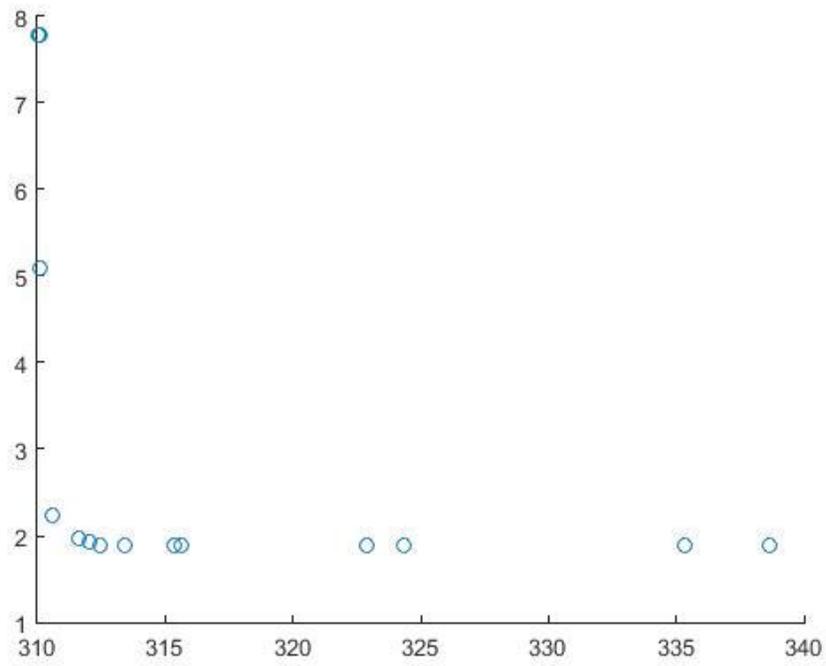


Frente de Pareto del modelo con Algoritmos Genéticos

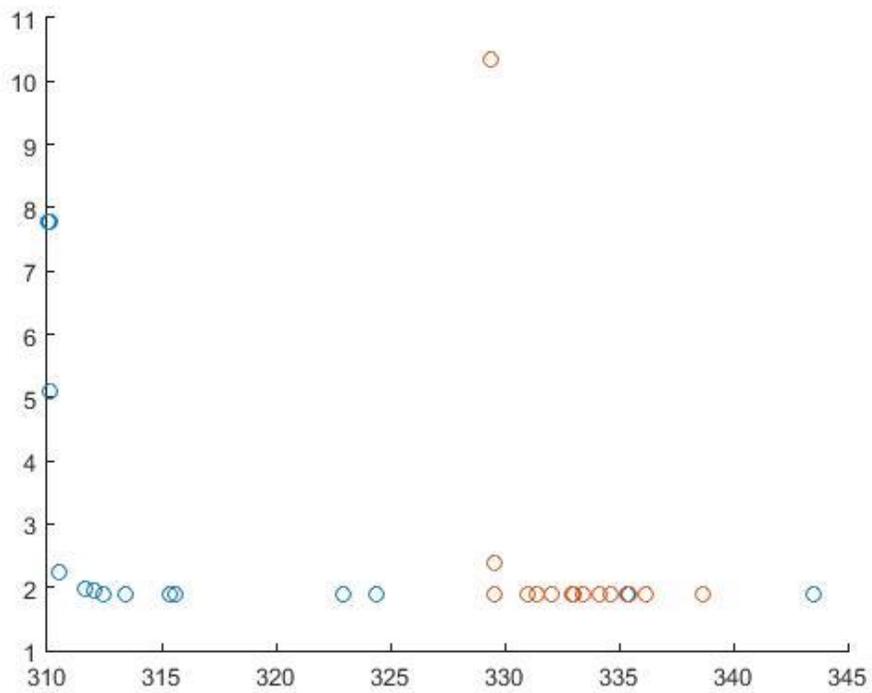


Frente de Pareto del modelo con Búsqueda Armónica

j) GFI*****

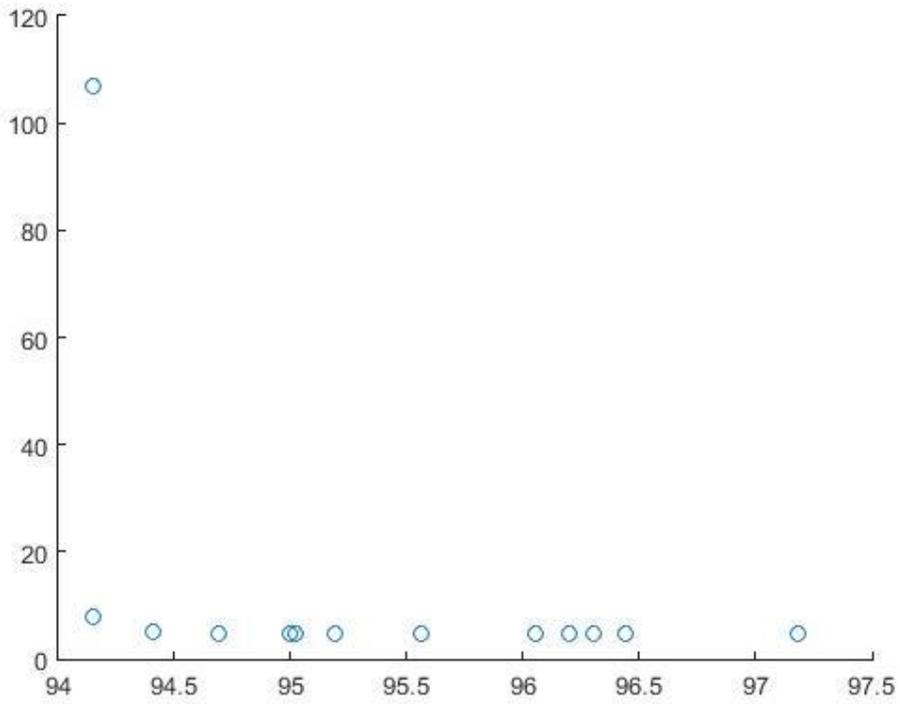


Frente de Pareto del modelo con Algoritmos Genéticos

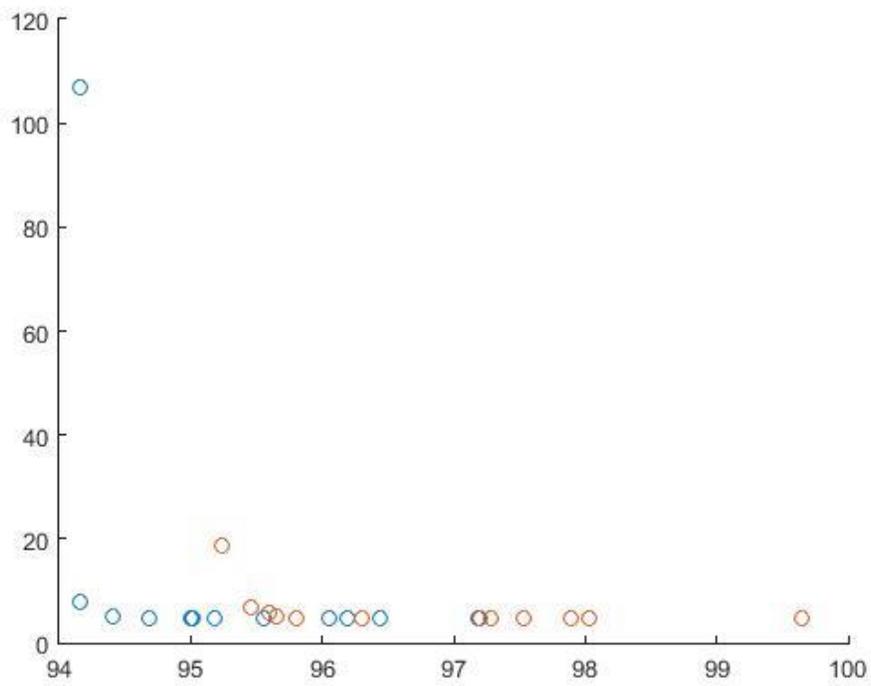


Frente de Pareto del modelo con Búsqueda Armónica

k) TL*****

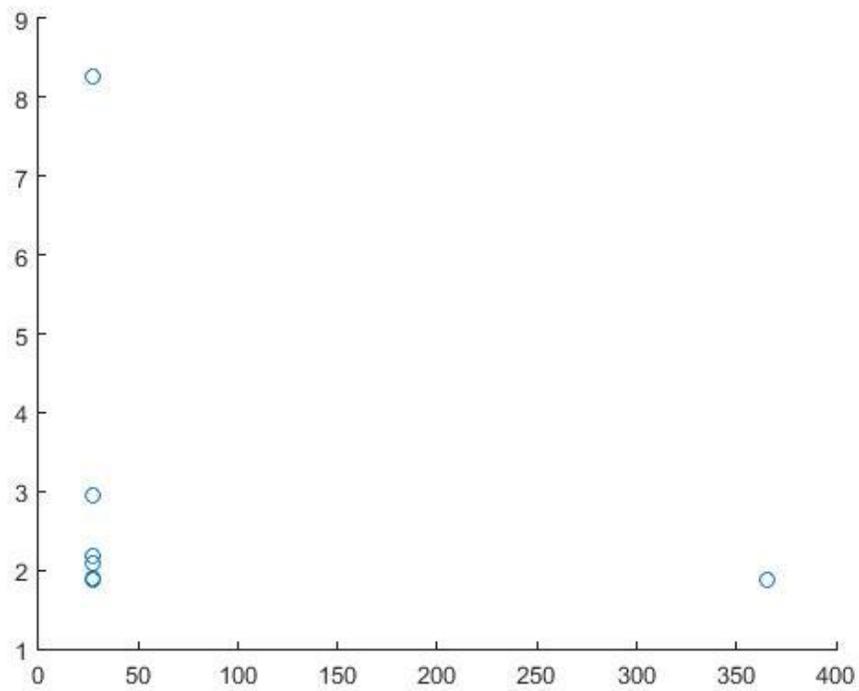


Frente de Pareto del modelo con Algoritmos Genéticos

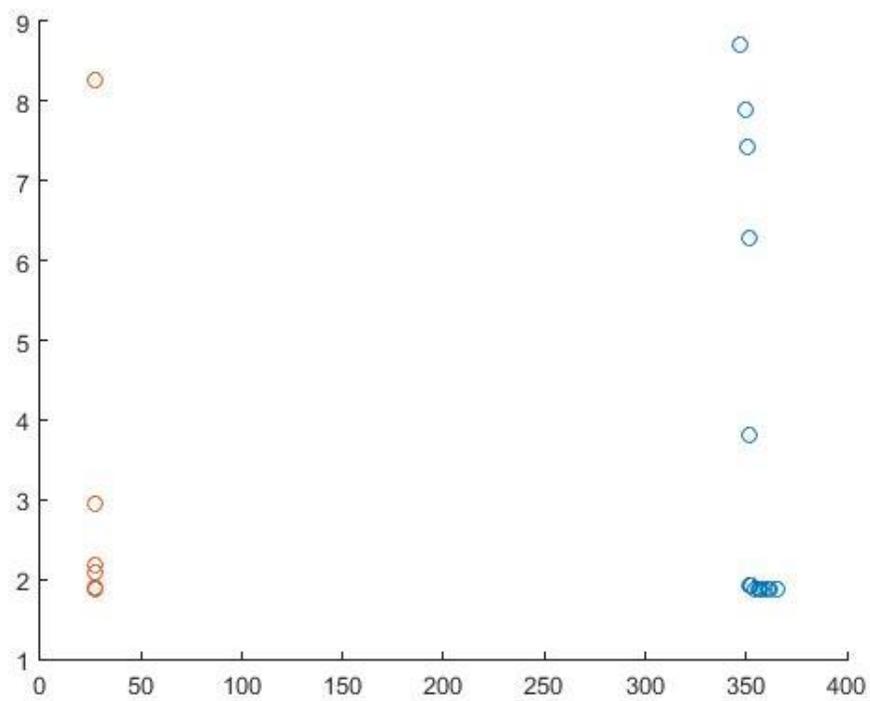


Frente de Pareto del modelo con Búsqueda Armónica

I) WA****



Frente de Pareto del modelo con Algoritmos Genéticos



Frente de Pareto del modelo con Búsqueda Armónica

ANEXO 3

Carta de aceptación



Ciudad de México, a 29 de mayo de 2020.

Juan Andrés Martínez-Escobar
Maestría en Ciencias de la Computación
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

Estimado Ingeniero Martínez Escobar:

Por medio de la presente nos es grato comunicarle que su artículo "Desarrollo de una metodología para el análisis y el pronóstico de acciones de la Bolsa Mexicana de Valores basada en optimización multiobjetivo", ha sido aceptado para ser publicado en la revista Estocástica: finanzas y riesgo, Volumen 10, Número 2, correspondiente a julio – diciembre de 2020.

Agradecemos su valiosa participación y esperamos volver a contar con sus colaboraciones en futuras ediciones.

Quedamos a sus órdenes.

ATENTAMENTE
"Casa abierta al tiempo"

Dra. Marissa R. Martínez Preece
Editora

c.c.p. Expediente

ANEXO 4

Artículo publicado

Desarrollo de una metodología para el análisis y el pronóstico de acciones de la Bolsa Mexicana de Valores basada en optimización multiobjetivo.

Juan Andrés Martínez-Escobar^{*}

Silvia Beatriz González Brambila^{**}

Román Anselmo Mora-Gutiérrez^{***}

Rubén Caudillo Félix^{****}

Resumen

En este trabajo, se presenta una nueva metodología para analizar y predecir el comportamiento de acciones de la Bolsa Mexicana de Valores basada en la concatenación sinérgica de estrategias estadísticas no paramétricas y modelos multiobjetivos de optimización. Esta metodología involucra dos fases, la primera, de filtrado, constituye un proceso automatizado para el análisis, evaluación y selección de la información necesaria y pertinente, para la caracterización del comportamiento de cada acción; posteriormente, la segunda fase de ajuste del modelo, involucra adaptar y resolver un modelo multiobjetivo para la predicción de precios de las acciones seleccionadas.

La base de datos empleada considera el comportamiento de doce acciones representativas en la Bolsa Mexicana de Valores en el periodo 2006 al 2016, el código fuente utilizado se encuentra disponible en “<http://bit.ly/396h3J1>”; los datos fueron obtenidos de una plataforma especializada sobre mercados financieros en Latinoamérica [1]. Los resultados numéricos obtenidos muestran que la fase de filtrado es capaz de identificar un conjunto compacto de variables relevantes con alta influencia en el precio futuro de cada acción en particular. En la segunda fase, se emplearon los datos del 2016 como valores a predecir sobre el modelo multiobjetivo y, comparado con el modelo de regresión lineal múltiple, se observa una mejora considerable en la calidad de los datos pronosticados, haciendo que el

^{*} Maestría en Ciencias de la Computación,
Universidad Autónoma Metropolitana-Unidad Azcapotzalco,
al2173803820@azc.uam.mx

^{**} Departamento de Sistemas,
Universidad Autónoma Metropolitana-Unidad Azcapotzalco,
sgb@azc.uam.mx

^{***} Departamento de Sistemas,
Universidad Autónoma Metropolitana-Unidad Azcapotzalco,
ing.romanmora@gmail.com

^{****} ruben_caudillo@hotmail.com

modelo generado a partir de la segunda fase tenga una confiabilidad mayor al 95%.

Clasificación JEL: C32, C61, G12, G14

Keywords: Modelos multiobjetivo, modelo geométrico browniano, algoritmos genéticos, búsqueda armónica.

Abstract

In this work, a new methodology is presented to analyze and predict the behavior of stocks of the Mexican Stock Market based on the synergistic concatenation of non-parametric statistical strategies and multi-objective optimization models. This methodology involves two phases. The first (filtering) leverages an automated process for the analysis, evaluation, and selection of the necessary and relevant information: for the characterization of the behavior of each action. The second (the model adjustment phase) involves adapting and solving a multi-objective model for the prediction of prices of the selected stocks.

The database used in this work includes the behavior of twelve significant stocks in the Mexican stock exchange in the period 2006 to 2016, the source code used is available in “<http://bit.ly/396h3J1>”; the data was obtained from a specialized financial markets platform for Latin America. The numerical results show that the filtering phase can identify a compact set of relevant variables with a significant influence on the future price of each stock. In the second phase, the data from 2016 is used to predict the multi-objective model, that compared with the multiple linear regression model, provides a considerable improvement in the quality of the predicted observed data. The model generated from the second phase has reliability greater than 95%.

JEL classification: C32, C61, G12, G14

Keywords: Multi-objective models, Brownian geometric model, harmony search, genetic algorithms.

Introducción

En este trabajo, se presenta una metodología para la organización, análisis y predicción de valores sobre el precio de cierre de acciones de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). Esta metodología se encuentra dividida en dos fases, en la primera fase se analiza, selecciona y filtra la información; en la segunda fase se emplea el conjunto de información reducido en la primera fase con el objeto de producir o generar un conjunto de coeficientes capaces de minimizar el error en los pronósticos, considerando la aleatoriedad de los movimientos. Las fases de la metodología propuesta tienen como finalidad resolver los problemas de selección de información y predicción de valores.

La calidad de los pronósticos realizados se puede mejorar con un modelo de regresión lineal múltiple a través de un filtrado adecuado de datos y del empleo de un modelo multiobjetivo. Cabe mencionar, que en la segunda fase, el modelo ajustado se empleó para pronosticar un año específico con el objeto de cuantificar y caracterizar el comportamiento de las acciones analizadas.

La hipótesis del trabajo sostiene que, se puede diseñar una metodología híbrida entre un enfoque multiobjetivo y la técnica del Movimiento Geométrico Browniano para la toma de decisiones en el mercado de acciones en México.

En términos generales, el problema abordado en este trabajo se define como, dado un conjunto de variables predictoras X , una variable respuesta (dependiente) Y , y \hat{Y} respuesta pronosticada, se desea encontrar un subconjunto X' tal que $X' \subset X$, el cual genere el $\arg \min(z)_{f(X') \rightarrow \hat{Y}} : \sum_{i=1}^n (Y - \hat{Y})^2$.

En la actualidad, la selección de la información pertinente para describir, caracterizar y analizar un fenómeno es una actividad relevante, ya que los avances tecnológicos han propiciado que las personas tengan acceso a una gran cantidad de información. Es decir, el desarrollo tecnológico ha incentivado una nueva forma de comunicación en red, asincrónica, rápida y efectiva sin depender de un lugar físico y, a veces, el lenguaje no es un impedimento [2]; sin embargo, la gran cantidad de información disponible conlleva a buscar estrategias de filtrado para manipular y analizar un subconjunto relevante y pertinente que permita la toma de decisiones de manera estratégica.

Por otro lado, la predicción de precios en el mercado de valores es una actividad importante en el ámbito económico y bursátil. El sistema económico bursátil es complejo ya que intervienen múltiples actores (empresas, gobierno, sociedad, entre otros), y sus posibles interacciones. Desde inicios del siglo pasado, la predicción de precios en el mercado de valores ha sido un campo de desarrollo científico, debido al gran impacto económico y social que conlleva esta actividad. Se debe mencionar, de acuerdo con la consulta realizada, que del año 2000 al 2019, se han publicado en la plataforma *ScienceDirect* [32] 18,144 trabajos relacionados sobre este tema, sin embargo, en predicción de precios de la BMV, el promedio anual es bajo (realizando la consulta en el buscador de *ScienceDirect* con los términos “stock price prediction in stock exchanges” acotando los resultados en los años seleccionados).

En la Ilustración 1, se muestra el número de trabajos reportados en *ScienceDirect* sobre el pronóstico de acciones en las bolsas de valores en el mundo en el periodo del año 1997 al 2020 (con la consulta mencionada acotando los años). Por otro lado en la Ilustración 2, se muestra un comparativo sobre el porcentaje de trabajos de pronósticos que han sido desarrollados para las bolsas de Estados Unidos de América (USA, por sus siglas en inglés), Hong Kong y México, entre 1997 y 2020, donde se observa que durante la primera década de este siglo la Bolsa de Valores de USA, tiene alrededor del 50% del total de trabajos producidos, cambiando por una tendencia decreciente hasta llegar a solo ser empleada en 25% de los trabajos. Tanto México como Hong Kong han representado entre el 10% y el 20% de las investigaciones (búsquedas realizadas en el sitio web de *ScienceDirect* con los términos mencionados arriba, añadiendo las palabras “USA”, “Hong Kong” y “México” respectivamente, acotando los resultados en los años mencionados).

El objeto de esta investigación, es presentar una metodología semiautomática, basada en estrategias de inteligencia artificial, para tratar y analizar la información de acciones para una predicción adecuada de los precios en la BMV. Cabe mencionar, que en la base de datos se incluye información de doce empresas mexicanas en el periodo comprendido de enero de 2006 a diciembre de 2016.

Ilustración 1. Producciones científicas sobre pronóstico de acciones entre 1997 y 2020.
Fuente: Generada a partir de los datos de la consulta en *ScienceDirect*.

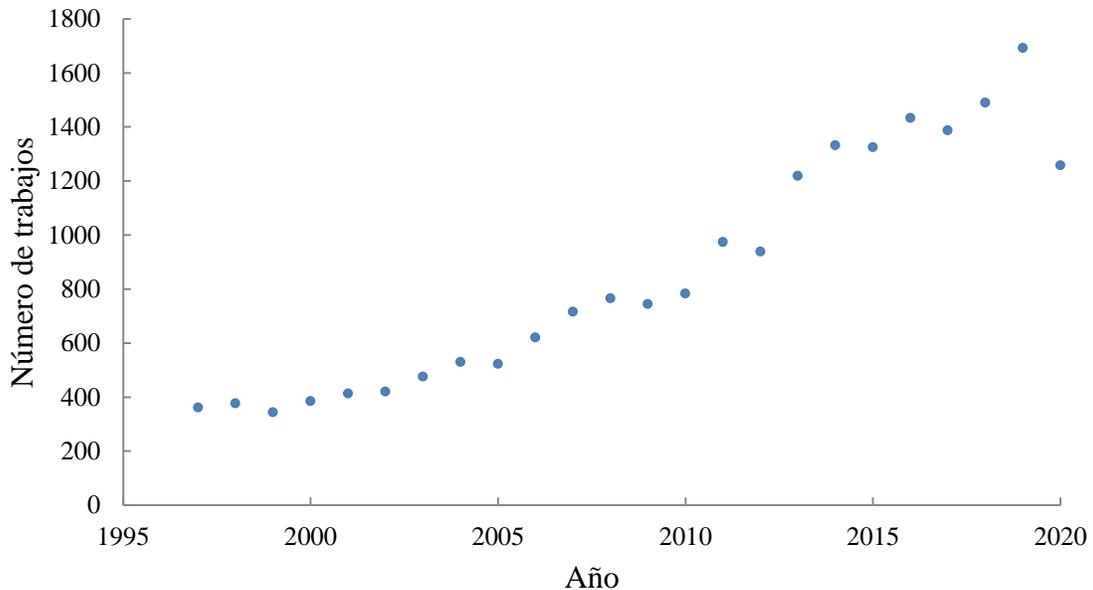
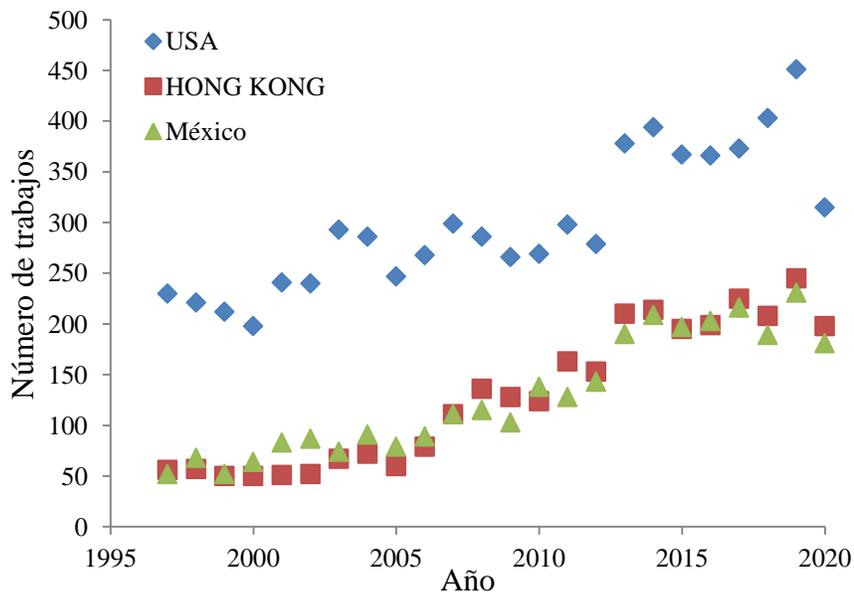


Ilustración 2. Comparativo sobre el porcentaje de trabajos aplicados a bolsas de valores de tres países. Fuente: Generada a partir de los datos de las consultas en *ScienceDirect*.



El presente documento se estructura de la siguiente manera: en la Sección 1 se da un conjunto de conceptos básicos relacionados con los temas de a) Manejo y análisis de información, b) Modelos para la predicciones de valores y c) Métodos heurísticos en la solución de problemas de optimización; posteriormente en la Sección 2 se aborda una revisión del estado del arte sobre pronóstico de acciones; en la Sección 3 se presenta y describe la metodología propuesta así como los modelos de optimización implicados; en la Sección 4 se aborda la metodología experimental empleada; en la Sección 5 se da un análisis de los resultados obtenidos; finalmente, en la última sección se plantean las conclusiones.

1. Conceptos básicos.

En esta sección se presentan los conceptos fundamentales en los que se basa esta investigación, su estructura es la siguiente: a) selección, análisis y manejo de información; b) pronóstico de valores y c) optimización como una herramienta para la toma de decisiones.

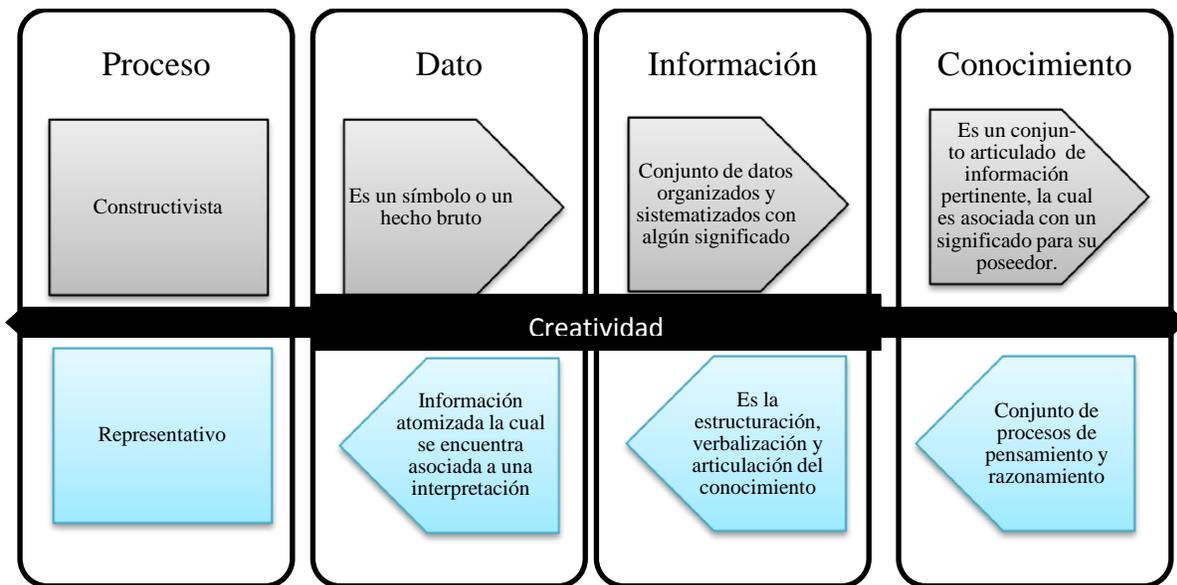
a) Selección, análisis y manejo de información.

En la actualidad el ser humano se encuentra sumergido en un ecosistema hiperconectado y global lo que permite la rápida generación, difusión, análisis y debate de información, a esto se le ha denominado sociedad del conocimiento [54]. En otras palabras, los miembros de la sociedad actual poseen la capacidad de obtener, generar y compartir información instantáneamente, desde cualquier lugar y en la forma que se prefiera. Lo que propicia innovaciones, modificaciones y desarrollos tecnológicos y científicos que impactan los medios económicos, sociales, culturales y políticos.

La posibilidad de acceder a una gran cantidad de información sobre cualquier tema conlleva el reto de transformar dicha información en conocimiento; como menciona Juárez y Ponce [55], en la sociedad actual el conocimiento es uno de los principales valores que poseen las personas. Para la construcción de conocimiento el ser humano emplea tanto su razonamiento (construcción *a priori* o proceso representativo), experiencia (construcción *a posteriori* o proceso constructivista), creatividad y su entorno sociocultural y tecnológico. El proceso descrito en la Ilustración 3 muestra una relación sinérgica entre los procesos constructivistas y representativos para el desarrollo de conocimiento.

La producción y los procesos para la generación de conocimiento han sido objeto de amplios estudios [56]–[58]. Lo anterior ha conllevado a lo que se ha denominado la cuarta revolución industrial.

Ilustración 3. Proceso para la construcción de conocimiento. Fuente: Elaboración propia



La gran cantidad de información involucra la integración y empleo de estrategias y métodos para la generación de conocimiento como una aptitud primordial de los tomadores de decisiones; ya que de lo contrario se corre el riesgo de saturación, banalidad, irrelevancia, pérdida de tiempo, entre otros [56]–[58].

Una estrategia empleada con objeto de manejar y analizar datos es el uso de sistemas de filtrado. En términos generales, se define el filtrado de información como una actividad que conlleva la selección y análisis con base en las necesidades. De acuerdo con Quiroga [59], un sistema de filtrado es una herramienta inteligente, la cual tiene el propósito de valorar, seleccionar y entregar información adecuada, precisa y pertinente que corresponda a las necesidades de un usuario.

Una forma de procesar y reducir el tamaño de un conjunto de datos se conoce como Análisis de Componentes Principales (PCA, por sus siglas en inglés). Como menciona Ian Jolliffe [60], cuando se confronta con un conjunto de datos muy extenso, el instinto natural nos incita a intentar reducir su tamaño, mientras se minimiza cualquier pérdida de información, para obtener mejor entendimiento e interpretar la estructura de los datos. Indica que, una estrategia alternativa, sería construir nuevas variables a partir de las originales, este enfoque parece menos intuitivo, pero tiene la ventaja que, por la misma cantidad de información perdida, podemos obtener mayores reducciones del conjunto de datos. PCA fue originalmente propuesto con un enfoque meramente estadístico por Pearson [61], la referencia más actual y recomendada se encuentra en la segunda edición del libro de Jolliffe [62].

En el diseño y desarrollo de un sistema de filtrado se encuentra inmerso el siguiente problema de optimización: $\max(z) \sum_{i=1}^{|C|} \sum_{j=1}^{|S|} u_{ij} x_{ij}$; donde: x_{ij} es uno si el j –ésimo ítem es usado por el i –ésimo usuario y x_{ij} es cero en cualquier otro caso; u , una función de

utilidad del j –ésimo ítem para el i –ésimo usuario tal que $u: C \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$; C es un conjunto de usuarios y S un conjunto de posibles *ítems*. [76]–[79].

En el diseño de sistemas de filtrado se han empleado árboles de decisión, máquinas de soporte vectorial, redes neuronales, redes bayesianas, discriminantes lineales, regresión logística, entre otros.

b) Pronóstico de valores en la toma de decisiones

El diseño de herramientas confiables para pronosticar y predecir el comportamiento de fenómenos o sistemas, ha sido objeto de interés en las investigaciones desde hace varias décadas. En términos generales, pronosticar se define como la generación de información y conocimiento que permite prever, caracterizar y analizar el comportamiento futuro de situaciones con base en estrategias lógicas, racionales, científicas y de experiencia previa; se debe mencionar que, frecuentemente la información generada por el proceso de pronóstico es empleada para la toma de decisiones.

Rubio menciona en [40] que pronosticar es una de las funciones más importantes dentro de las empresas, industrias y negocios; ya que a través de la información producida se toman decisiones. En la Ilustración 4 se muestra la clasificación de los métodos de pronósticos comúnmente empleados.

Ilustración 4. Métodos comunes de pronóstico

Métodos de pronósticos	Cuantitativos	Se basan en el empleo de estrategias lógico-matemáticas para el análisis histórico de datos. Generalmente, se les denomina procedimientos objetivos.	<ul style="list-style-type: none"> • Series de tiempo • Modelos causales • Modelos de optimización • Modelos de simulación • Otros
	Cualitativos	Se basan en la experiencia e intuición; por ende son procedimientos con un grado de subjetividad.	<ul style="list-style-type: none"> • Método Delphi • Analogías con sistemas similares
	Mixtos	Se basan en la combinación sinérgica de estrategias cuantitativas y cualitativas.	Aquí se encuentran varias estrategias de IA y Machine Learning.

Algunos autores diferencian los conceptos “Pronóstico” y “Predicción”, haciendo énfasis en que el pronóstico se basa en datos de naturaleza objetiva; en contraste, predicción se basa en información subjetiva. En la actualidad, las metodologías de naturaleza mixta han crecido en su aplicación [41], [42].

En el presente trabajo, se emplearon métodos cuantitativos que integran procedimientos causales, series de tiempo y de optimización en la generación del modelo predictivo. En las subsecciones siguientes se describen brevemente los modelos causales.

Un “modelo” es una representación o abstracción selectiva (cuantitativa o cualitativa) de las características de un sistema. De manera general, los modelos causales involucran que dado un conjunto X de variables descriptoras (también denominadas independientes) y una variable y a explicar (llamada dependiente) encontrar una función $f(X, B)$ tal que $f(X, B) \rightarrow \hat{y}$; donde $y = \hat{y} + \varepsilon$, ε es una medida de error entre y y \hat{y} , $B = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n\}$ es un conjunto de coeficientes asociados a las variables X .

Los modelos de series de tiempo involucran que dado el comportamiento histórico de la variable y en el periodo $t - 1$ a $t - k$ encontrar una función $f(y_{t-1, t-k}, \Psi)$ tal que $f(y_{t-1, t-k}, \Psi) \rightarrow \hat{y}_t$; donde, $y_t = \hat{y}_t + \mu$; y_t es el valor real de la variable y en el instante t , \hat{y}_t es el valor calculado para la variable y en el instante t . μ es una cuantificación de ruido en función del tiempo, $\Psi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_k\}$ es un conjunto de coeficientes asociados a los valores históricos de y .

En la literatura consultada, el modelo Log-Normal basado en el Movimiento Geométrico Browniano (MGB), es empleado frecuentemente en los modelos de serie de tiempo. Algunos autores [45] describen al MGB como un modelo diferencial estocástico tipo Itô, en el cual el valor de una variable a predecir (activo financiero), es modelada añadiendo una función de caminata aleatoria en el tiempo.

c) Optimización como una herramienta para la toma de decisiones

Los modelos de optimización se caracterizan por poseer: a) un conjunto de alternativas o variables de decisión (el valor de estas afectan el desempeño del sistema), b) un conjunto de restricciones, las cuales representan relaciones o condiciones que el conjunto de variables de decisión están obligadas a satisfacer, y c) un conjunto de funciones objetivo, las que se emplean como medida cuantitativa sobre la calidad de las soluciones encontradas de un problema y son una función matemática de las variables de decisión.

Como se mencionó con anterioridad, la determinación de coeficientes en un problema de pronóstico puede implicar un sistema no lineal y por ende se involucra un problema de optimización NP-completo.

Si la función objetivo $f(\chi, \theta)$, espacio de búsqueda $S(y, f(\chi, \theta))$ o ambas son relaciones no lineales, entonces se tendrá que resolver una instancia del problema de optimización no lineal, el cual es NP-duro. Un conjunto de técnicas empleadas para resolver esta clase de problemas son los métodos metaheurísticos.

Una metaheurística es un procedimiento flexible e inteligente para generar buenas soluciones a un problema con un consumo razonable de recursos. Las soluciones generadas por estos procedimientos no son necesariamente óptimas. A continuación, se describen qué

son las metaheurísticas de los algoritmos genéticos y la búsqueda armónica, las cuales serán empleadas en este trabajo.

Los algoritmos genéticos (GA) son un enfoque de optimización evolutiva basado en algoritmos de búsqueda aleatoria, desarrollado por John Holland en 1975 [67], es un método muy popular debido a su robustez para la solución de problemas complejos y no lineales. Tiene numerosas ventajas sobre otros métodos clásicos, ya que pueden converger fácilmente a una buena, o bien, a la mejor solución más rápido que otros. Se utilizan operadores genéticos, como selección, mutación y cruce para obtener soluciones. Los pasos básicos son: a) el algoritmo inicializa una población de posibles soluciones; b) se aplican los operadores genéticos; c) se evalúa la función para cada individuo; d) se eliminan, ocasionalmente las malas soluciones de la población; e) una nueva población es creada de nuevo utilizando los operadores, este proceso se repite hasta llegar a un criterio de paro.

Búsqueda armónica, propuesta en 2001 por Geem [31], en este algoritmo se adaptan los conceptos de creación musical en optimización. Las soluciones formuladas son llamadas “armonías” y, cada valor de la misma se llama acorde, se inicializa la memoria de armonías, seleccionando aleatoriamente los valores de las soluciones y se calcula su función objetivo, enseguida se improvisa una nueva solución tomando en consideración la memoria, si esta nueva solución “improvisada” es mejor que la peor en la memoria, se sustituye y se repite el proceso hasta el criterio de paro. Se debe recordar que se utilizan tres operaciones básicas las cuales son: recordar, adaptar e improvisar. Para mayor información se puede consultar: [31].

En la siguiente sección, se da una revisión bibliográfica con énfasis en los trabajos de pronóstico en bolsas de valores, que involucran el empleo de estrategias de inteligencia artificial.

2. Estado del arte.

En la literatura existen múltiples trabajos que versan sobre el desarrollo de estrategias computacionales para predicción de acciones e índices. Dentro de estos, se encuentran el uso de Redes Neuronales Artificiales [3], Support Vector Machines (SVM) [4] y Árboles de decisión [5] entre otros métodos de Inteligencia Artificial. Algunos autores han optado por combinar técnicas de IA en sus modelos propuestos, para mejorar los resultados de predicción. Por ejemplo, en el estudio de Choudhry & Garg [6], realizaron un modelo híbrido GA-SVM, implementando en los datos de entrada una primera fase con un Algoritmo Genético (GA), para posteriormente realizar, con los datos obtenidos, una segunda fase con SVM. Este trabajo contó con 35 valores técnicos como entrada para el modelo, sin embargo, proponen variar este número, para intentar obtener un rendimiento mayor en la predicción de precios futuros. Trabajaron con tres conjuntos de valores (stocks) de los más prominentes de la bolsa de valores de India. Entre los resultados obtenidos de este estudio, se encuentra una mejora significativa en el rendimiento de la ejecución del modelo híbrido en contraste con el modelo de una sola capa de SVM.

A finales del otoño de 2014, Patel & Shah [7] implementaron algoritmos en dos capas para predecir los índices bursátiles. Se trabajó con los índices llamados “CNX Nifty” y “S&P Bombay Stock Exchange (BSE) Sensex” del mercado de valores de India, realizaron predicciones a futuro de 1-10, 15 y 30 días, mostraron entre sus conclusiones, una mejor predicción cuando se utilizó un acercamiento de dos etapas, haciendo uso en la primera etapa de regresión de soporte vectorial (SVR), y en la segunda etapa se usó Redes Neuronales Artificiales (ANN), Random Forest (RF) y SVR. El resultado son modelos de predicción SVR-ANN, SVR-RF y SVR-SVR. Se compararon los resultados de estos modelos junto con los de una sola etapa, y se obtuvo un mejor resultado en los modelos de dos etapas, el modelo que mostró un mejor desempeño de estos fue SVR-ANN. Este método final de implementación de dos capas es propuesto por los autores para ser aplicado en otros campos, como predicción del clima y consumo de energía, entre otros.

Como se mencionó con anterioridad, el empleo del movimiento geométrico Browniano (MGB) en tareas de pronóstico de precios es frecuente [20], [21], [80], por ejemplo: algunos emplean al MGB para ciertas tareas dentro de algoritmos bioinspirados [22], y otros utilizan, también, la idea del movimiento browniano para implementar un modelo de predicción [23]–[25].

Mason & Wilmot [20] realizaron predicciones de precio sobre el mercado emergente de combustibles renovables en Estados Unidos, el cual al manejar materias primas, se alimenta con nueva información que puede producir cambios bruscos o saltos; explican que puede tener un comportamiento más complejo que el MGB, así que, tomando como base el movimiento geométrico browniano, desarrollan modelos de predicción de precios, y obtuvieron resultados con una cantidad aceptable de error.

Modelo

En un modelo multiobjetivo, se plantean un conjunto de funciones objetivo (dos o más) en conflicto entre sí. Por ejemplo: $\text{Min } f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ sujeto a: $g(x) \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, p$, $h(x) = 0$ para todo $j = p - 1, \dots, m$, $x_i \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times m}, b \in \mathbb{R}^n$

En optimización multiobjetivo, el término optimizar, se refiere a encontrar un ajuste entre las distintas funciones objetivo en lugar de una sola solución como en optimización global.

Modelo multiobjetivo para la determinación de predictoras

El modelo siguiente es empleado en la sección de filtrado con recocido simulado para la reducción

de variables: $\min z_1 = \sum_{i=1}^N w_i$, $\min z_2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{N}$, $\min z_3 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \beta_{ij} * w_i * w_j$,
 $\min z_4 = - \sum_{i=1}^N \alpha_i$.

Sujeto a: $w_i = 1$, si la variable x_i es seleccionada como predictora; 0, si la variable x_i NO es seleccionada como predictora; $g(x, w) = \hat{y}_i$, $\beta_{ij} = 0$, si la variable x_i es estadísticamente similar a

x_j , -1, si la variable x_i NO es estadísticamente similar a x_j ; $\alpha_i = \text{absoluto}(\text{correlación}(y_i, x_i))$,
si $w_i = 1$, o 0, si $w_i = 0$

Donde, $g(x, w)$ es una función de x y w que estiman a y . En este trabajo, se considera que una variable es exactamente igual o una combinación lineal de otra variable, si la media entre ambas variables (x_i, x_j) es estadísticamente similar así como su varianza.

En este trabajo, también se considera que se desea encontrar una función $f(x) = \hat{y}$, tal que el error producido entre la y (*real*) y la \hat{y} (pronosticada), sea mínimo, tanto para el periodo de entrenamiento como para el periodo que se desea pronosticar. Cabe mencionar que determinar o encontrar un conjunto de funciones que cumplan estas características es un problema NP-completo, por lo cual no existe un método exacto que lo pueda resolver en tiempo polinomial.

Entonces, el problema de selección de parámetros en modelos de regresión se determina por una tupla $(\theta, x, y, f(x, \theta), S(\theta), \varepsilon, n, m)$, una solución de este problema involucra encontrar una configuración θ adecuada, tal que, sea un conjunto de argumentos mínimos.

Para la búsqueda de los parámetros para la implementación de un modelo ARMA (Auto-regresivo de medias móviles), se han utilizado GA [26], [27], también han usado GA para la búsqueda de parámetros de vectores de soporte regresión [28]. En este trabajo se implementaron GA y Búsqueda Armónica (HS) [31], las cuales se describen en la siguiente sección.

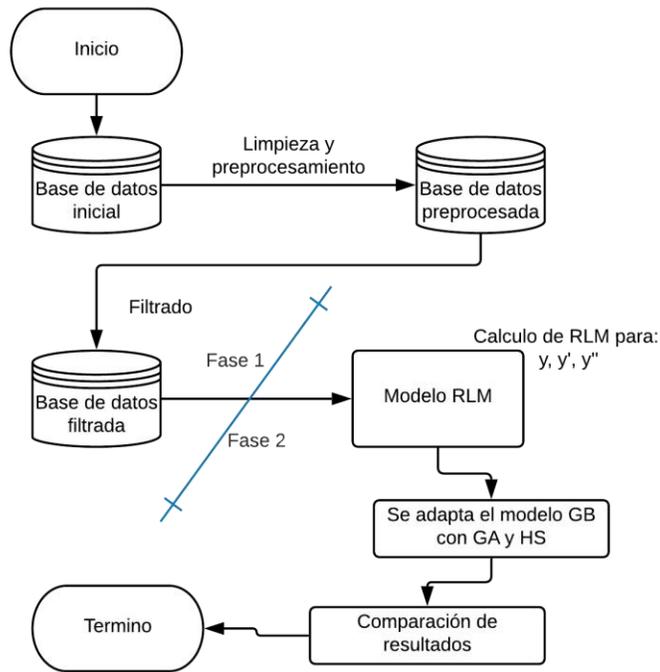
3. Metodología

En esta sección se expondrá el proceso metodológico realizado en este trabajo. La estructura de la presente sección es la siguiente: a) metodología experimental y b) diseño experimental. Se debe mencionar que se empleó la metodología propuesta por de-los-Cobos-Silva en [81].

a) Metodología Experimental

El proceso completo que se llevó para la realización de este trabajo se presenta en la Ilustración 5. Como se mencionó en la sección anterior, la parte de selección de variables es muy importante y conlleva por lo tanto una buena cantidad de trabajo y tiempo. Las bases de datos iniciales son descargadas, cargadas en el sistema, analizadas y depuradas para mayor facilidad de uso y procesamiento (eliminación de valores nulos, cambio de tipo de datos, etc.). La base de datos preprocesada se introduce en el proceso de filtrado de variables para reducir el número de entradas y minimizar el error en un modelo de regresión lineal múltiple (RLM). Una vez obtenida la base de datos filtrada, se formula el Modelo Geométrico Browniano y se adaptan las metaheurísticas para obtener valores óptimos de las variables del modelo. Cabe mencionar que para la primera fase se emplea recocido simulado mientras que para la segunda fase se emplea GA y HS. A continuación se presenta una explicación más detallada de cada parte del proceso completo.

Ilustración 5. Diagrama del proceso completo



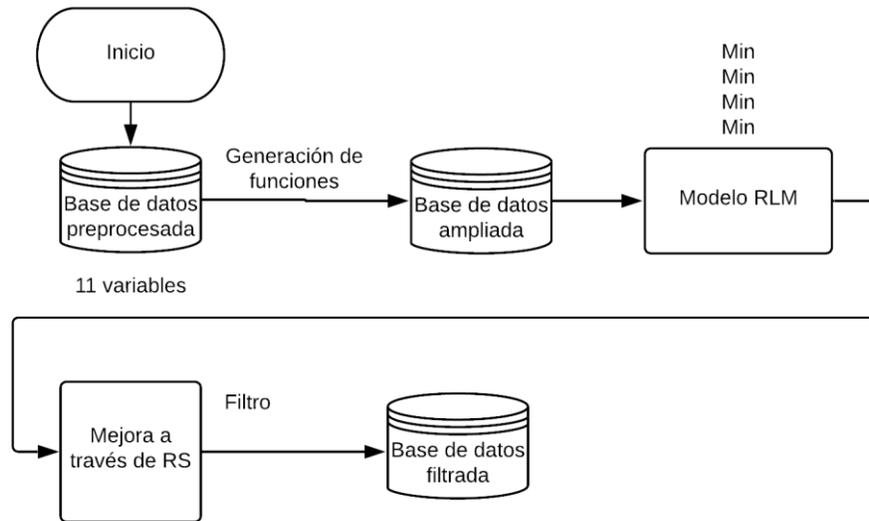
Primera fase

La separación entre las variables predictoras y la que se va a predecir (valor de cierre) obedecen al interés mostrado en otros trabajos. En la Ilustración 6 se presenta el proceso del filtrado de datos. Debe mencionarse que solo para las variables predictoras, se realizó lo siguiente:

La base de datos original, inicialmente de 11 variables, se amplía aplicando 12 funciones (ver Anexo 1) a cada una de ellas, generando así 132 variables que permitan determinar el valor de cierre de las acciones de un conjunto de 12 empresas mexicanas que cotizan en la BMV (Bolsa Mexicana de Valores).

El objetivo de esta fase es minimizar “ α ”, el número de variables asociadas para describir el comportamiento de una variable dependiente, donde: $\alpha = \sum_{i=1}^k X_i$; $x_i = \{1, \text{ si se usa la } i \text{ variable, o } 0 \text{ en cualquier otro caso}\}$, $k = \text{número de total variables}$.

Ilustración 6. Diagrama del filtrado de variables



De esta manera se obtiene un problema multiobjetivo, el siguiente modelo es empleado para la determinación de coeficientes del modelo no lineal de pronóstico empleado en la segunda fase de este trabajo:

$$Max Z_1 = |Corr| , Min Z_2 = \frac{SSE_a}{N_a} , Min Z_3 = \frac{SSE_p}{N_p} , Min Z_4 = \alpha$$

Donde, $|Corr|$ es el valor absoluto del coeficiente de correlación lineal, SSE es el error cuadrático, N el número de datos, a es el conjunto de entrenamiento, p es el conjunto de prueba y α el conjunto de variables a usar.

Dado que es un modelo de regresión lineal múltiple, se considera la siguiente ecuación: $\hat{y}_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon$. El filtrado de variables se realiza de la siguiente manera, dadas k variables, para cada X_i , no se emplea en el modelo si y solo si: el promedio de la variable X_i es igual al promedio de y' , y: $\delta_{X_i}^2 = \delta_{y'}^2$, la varianza de X_i es igual a la varianza de y' .

Se determina el conjunto de variables estadísticamente diferentes a y y cuyo coeficiente de correlación es diferente de cero, denotando el conjunto X_r . Posteriormente para cualquier par de variables en X_r se determina si i y j son estadísticamente similares, en caso de serlo se penalizará emplear simultáneamente a i y a j . Sea $m1$ el modelo de regresión lineal múltiple $g(X_r) \rightarrow y$, se evalúa el modelo generado con base en el modelo multiobjetivo y se determina un conjunto θ de parámetros para la ejecución del recocido simulado multiobjetivo (sea p el número de puntos en el frente de Pareto, T_i temperatura inicial, T_f temperatura final, α criterio geométrico de descenso de temperatura, k número de ejecuciones antes del descenso de temperatura) para encontrar el conjunto mínimo de variables necesarias. Se genera un conjunto de $2p$ soluciones iniciales con base en la información de m_1 y se evalúan las soluciones encontradas, sea A el conjunto de p

soluciones iniciales aquellas que se toman al considerar criterio de no dominancia y el criterio de suma ponderada

A continuación, se presenta el pseudocódigo del algoritmo del recocido simulado para el filtrado:

Ilustración 7. Algoritmo de recocido simulado para filtrado de variables. Fuente:
Elaboración propia

Entrada	Un conjunto expandido de variables predictoras
---------	--

$T_a = T_i$

MIENTRAS $T_a > T_f$

PARA $i = 1: k$

PARA $j = 1: p$

S_i i-ésima solución en A

S_n sea una solución generada con búsqueda local

 Si S_n es mejor que S_i , entonces S_i en A es remplazado por S_n

 Si no se determina el criterio de metrópolis posteriormente se emplea éste para decidir si S_i en A es remplazado por S_n .

B_j sea la solución desechada

FIN PARA

$T_a = \alpha * T_a$

$C = A \cup B$

A son las p mejores soluciones de C

$B = []$

FIN PARA

SALIDA Subconjunto de X_r de variables predictoras

Segunda fase

La función del Modelo Geométrico Browniano para la predicción de \hat{y} (precio de la acción) es el siguiente:

$$\hat{y} = a_1 y + e^{a_2 y' + a_3 y'' + \mu_{error} + \sqrt{t} \times S_{error} \times \alpha}$$

Donde:

- a_i con $i = 1, 2, 3$, son constantes a encontrar,
- y es el resultado del cálculo con Regresión Lineal Múltiple obtenida con el filtrado ($f(x)$, en primera fase),
- y' es la primera derivada y calculada ($f(x')$),
- y'' es la segunda derivada de y calculada ($f(x'')$),
- μ_{error} es la media del error,
- t es el tiempo transcurrido,
- S_{error} es la varianza del error sobre y calculada,

- α es un aleatorio normalmente distribuido ($\alpha \sim N(0,1)$).

Una vez obtenido la base de datos filtrada (Ilustración 4), se inicializa el Modelo Geométrico Browniano, y se adaptan las metaheurísticas de GA y HS para la búsqueda de los mejores parámetros del modelo predictivo.

Algoritmos Genéticos

Se aplicó el algoritmo genético básico, con una población de 10 individuos, cada cromosoma se representó por una cadena de números enteros compuesta por tres constantes a encontrar (a_1, a_2, a_3), la media del error (μ_{error}), la varianza del error sobre y calculada (S_{error}), funciones objetivo 1 y 2 (O_1, O_2) como puede observarse en la Ilustración 8. Estos individuos fueron almacenados en una matriz para su manipulación.

Ilustración 8. Representación de un individuo en el algoritmo genético básico. Fuente: Elaboración propia

a_1	a_2	a_3	μ_{error}	S_{error}	O_1	O_2
-------	-------	-------	---------------	-------------	-------	-------

La creación de la población inicial es aleatoria, la selección de padres se realiza mediante torneo binario. Una vez que se obtiene la pareja de padres, se realiza la cruce para obtener un hijo, la cruce se realiza en dos puntos seleccionados de manera aleatoria del cromosoma, se transfiere la información genética a los hijos y se almacenan.

Con los nuevos hijos se genera la corrida de mutación, con una probabilidad de 15% con los hijos elegidos, se selecciona un “gen” a mutar. A continuación se unen la población anterior con los hijos y se ordenan por aptitud, se selecciona la mejor mitad y esta se convierte en la nueva generación. El proceso se repite hasta que se cumple el criterio de paro, en nuestro caso, al llegar a las dos mil generaciones procesadas.

Búsqueda Armónica

Se aplicó el algoritmo de Búsqueda Armónica (HS, por sus siglas en inglés), el cual contó con una memoria de armonías de diez elementos, una tasa de ajuste de tono de 10%, una tasa de consideración de armonía de 70%, un máximo número de iteraciones de dos mil y su información fue representada en cadenas de números enteros en la primera sección, representando la parte a buscar y el resto, variables calculadas con los primeros tres valores de la armonía, del Modelo Geométrico Browniano. Estas armonías se almacenaron en una matriz para su manipulación.

Cada armonía está igualmente compuesta que los individuos del AG. En la creación de la memoria de armonías aleatoriamente, se llena su información con los valores acotados en los que deben estar los parámetros, un número aleatorio de una distribución normal. Posteriormente se improvisa una nueva memoria de armonías considerando la actual, ajustes de acordes (constantes a buscar) y aleatoriedad. El algoritmo que se emplea para la creación de una nueva memoria de armonías se presenta en la Ilustración 9.

Ilustración 9. Sección del algoritmo de Búsqueda Armónica para creación de una nueva memoria de armonías. Fuente: Elaboración propia

Crea una memoria armónica inicial

MIENTRAS criterio de paro no satisfecho

PARA j=1: HM

PARA k=1: 3

SI rand < (1-PAR)

selection = una armonía aleatoria

sol_nueva(j,k) = memoria_h(selection,k)

SI rand < HCR

s1 = raíz(varianza(memoria_h(:,k)

SI s1==0

s1=1

FIN SI

sol_nueva(j,k) = sol_nueva(j,k) + randn*(s1)

FIN SI

OTRO

apar1=mínimo(memoria_h(:,k)

apar2=máximo(memoria_h(:,k)

MIENTRAS apar2==apar1

apar2=apar2+randn

FIN MIENTRAS

sol_nueva(j,k) = apar1+randn*(apar2-apar1)

FIN SI

FIN PARA

sol_nueva(j,4) = Calcular media del error

sol_nueva(j,5) = Calcular varianza del error

sol_nueva(j,6) = Calcular Objetivo 1

sol_nueva(j,7) = Calcular Objetivo 2

FIN PARA

Determinar el conjunto de soluciones no dominadas

FIN MIENTRAS

Una vez llegado a este punto del proceso, se unen las memorias, la nueva improvisada y la anterior, se ordenan por mejores resultados de los objetivos ponderados, se selecciona la mejor mitad y esta procede a ser almacenada como la memoria de armonías inicial para la siguiente iteración. Este proceso se repite hasta llegado el criterio de paro, en nuestro caso, al llegar a las dos mil generaciones procesadas. Se emplea el criterio de no dominancia y suma ponderada. Se evalúan ambos métodos usados por índices de calidad o desempeño,

los cuales son: hipervolumen, distribución, distancia generacional invertida y cobertura de conjuntos.

b) Diseño Experimental

Una vez obtenidas las bases de datos de la plataforma especializada, se guardaron en formato .CSV (archivo separados por comas, por sus siglas en inglés), se realizaron cambios a formatos de número de los datos y se removieron los títulos de las columnas, se almacenaron en formato .TXT (archivo de texto) para facilitar la manipulación en MATLAB.

Para realizar el filtrado de variables, se procesó cada caso en la base de datos en MATLAB, esto se ejecutó en la versión r2014b, en una computadora iMac Retina 5K, con un procesador Intel Core i5 3.2 GHz y memoria 8GB 1867 MHz DDR3, el análisis de una instancia implicó la ejecución de 20 corridas del algoritmo con un promedio de 8 horas cada una. Al final de cada ejecución, se obtuvieron las gráficas y tablas de información que pueden ser consultadas en “<http://bit.ly/396h3J1>”.

La siguiente parte del modelo se ejecutó, también, en MATLAB. La implementación de dos metaheurísticas para la obtención de los parámetros del MGB, ambas implementaciones se probaron 20 veces y se guardaron los resultados, tuvieron un tiempo de ejecución por cada acción de 2 a 3 horas por técnica heurística implementada. Con las soluciones generadas por cada método, se analizaron las medidas de desempeño y los frentes de Pareto de ambas técnicas heurísticas para obtener los resultados.

4. Datos

Para la realización de este trabajo se seleccionaron al azar, con el fin de no sesgar los datos, empresas grandes de distintos sectores que operan en la BMV, el cual es considerado un mercado financiero emergente [17]. Las bases de datos se obtuvieron de la plataforma de “Economática” [1], posteriormente depuradas para eliminar valores faltantes por días sin operación (días festivos) y para el filtrado de variables. La base de datos depurada, antes de la aplicación de funciones a las mismas, consta de 12 variables, las cuales son, valor de cierre, apertura, valor mínimo, valor máximo, volumen, número de operaciones, promedio, RSI, AccRSI, MACD, Momento a 10 días y Bollinger. El periodo de análisis de la muestra comienza en enero de 2006 y termina en diciembre de 2016, fue elegido debido a los eventos recientes ocurridos en México, entre otros: elecciones presidenciales, aumento en índices de violencia, “guerra contra el narcotráfico”, crecimiento de redes sociales, y en el mundo, desde la recesión en 2008, la crisis de deuda de la eurozona en 2011, el Brexit y las elecciones en USA en 2016.

5. Análisis de Resultados

Como fue mencionado en la segunda sección, el filtrado es una herramienta que ayuda a reducir el número de variables necesarias y mejora la calidad de los resultados obtenidos,

en la Ilustración 10, se puede observar la representación de los frentes de Pareto de los cinco objetivos del modelo, descritos en la sección 3, para el pronóstico de la acción de “Bimbo”. Se puede apreciar una dispersión considerable en los puntos, y no es posible identificar una curva bien definida en la mayoría de los casos.

Los resultados de las demás acciones, tanto gráficas como tablas, obtenidos en este trabajo pueden ser consultados en “<http://bit.ly/396h3J1>”, por motivos de espacio, solo se presentan los resultados de la acción de “Bimbo”. Después de realizado el filtrado de variables, se observa en la Ilustración 10, que las curvas de los frentes comienzan a dibujarse más claramente en cada comparación. La forma de generación de las soluciones permitió evitar emplear variables colineales, por ende, el objetivo 3, del modelo presentado siempre toma el valor de cero.

Es posible observar esta mejora en el modelo, al comparar la Ilustración 11, se muestran los pronósticos del valor de la acción antes del filtrado de datos y los pronósticos después del mismo, en ambas gráficas, el eje “y” corresponde al valor en pesos (\$), el eje “x” es el número de días del periodo de prueba, la línea continua es el valor real de la acción y los círculos pequeños representan los pronósticos de los modelos generados; se puede ver un incremento en los modelos generados que reducen la distancia al valor real de la acción a pronosticar.

Ilustración 10. Frentes de Pareto de los objetivos del modelo antes (izquierda) y después (derecha) del filtrado de datos.

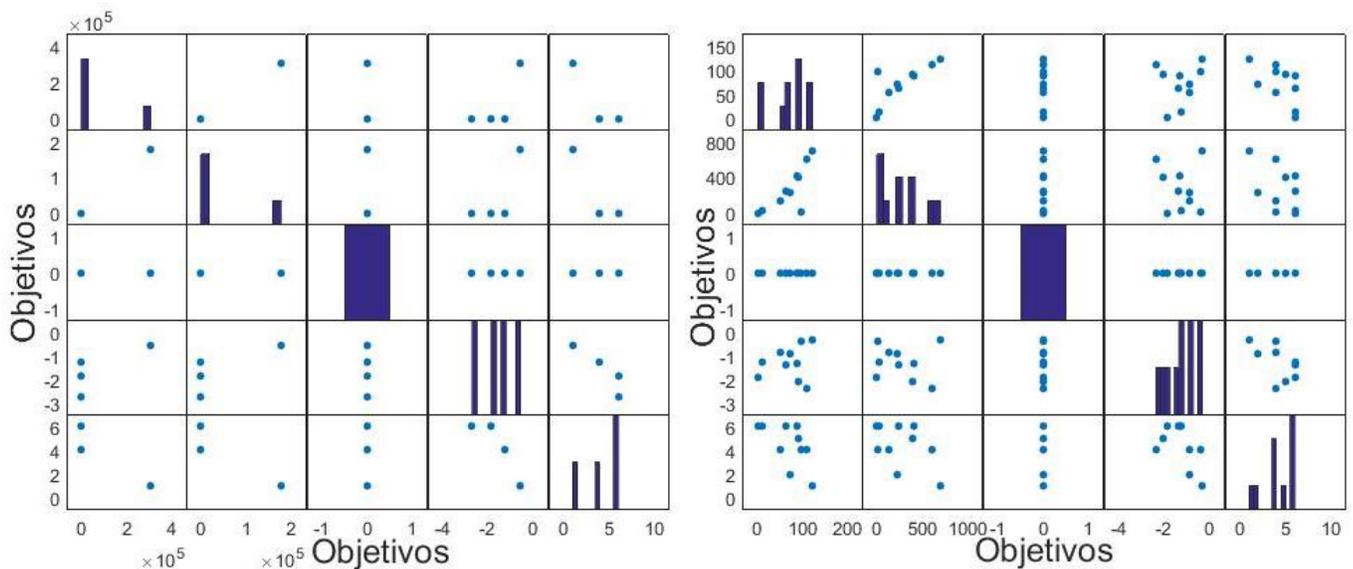
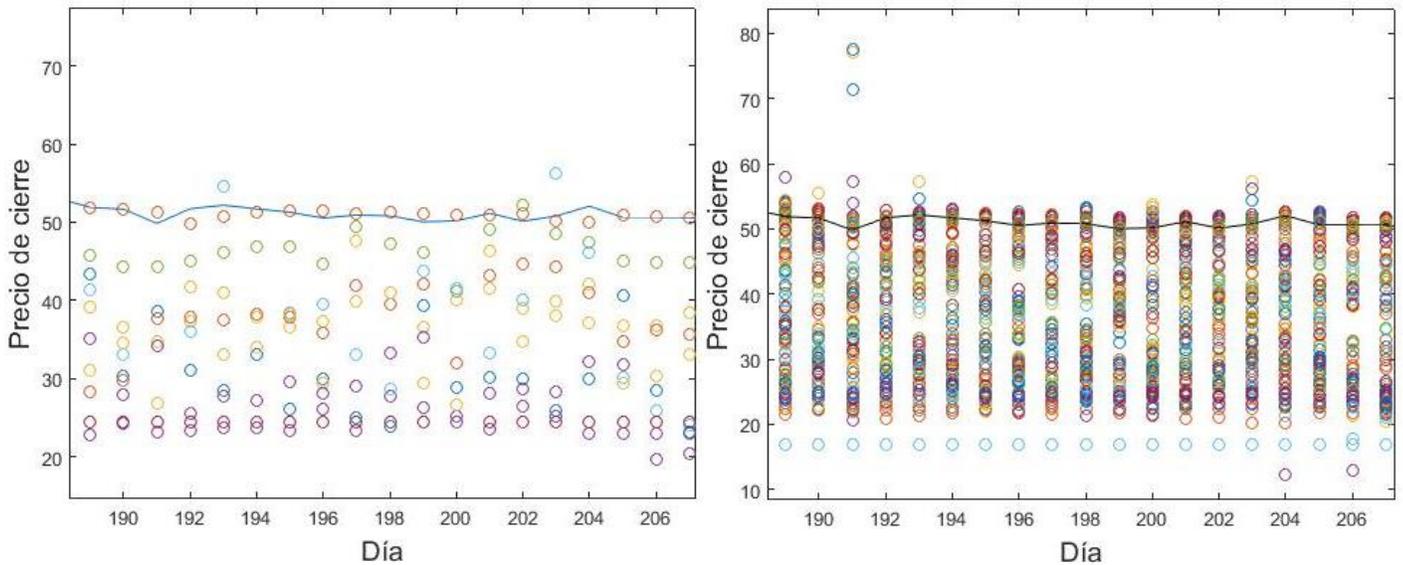


Ilustración 11. Pronóstico del valor/stock (Bimbo) antes (izquierda) y después (derecha) del filtrado de variables



Por último, se concentra en la Ilustración 12, los resultados del filtrado de variables de las 12 acciones con las que se trabajó, de un total de 132 variables en cada caso, se redujo a estos números, de izquierda a derecha, en la primera columna se presenta el número máximo de variables usadas, del total de variables de la base de datos ampliada, en los modelos creados para cada acción. En la segunda columna, el número mínimo de variables usadas, en la tercer y cuarta columna, el promedio y mediana, respectivamente, de variables usadas en los modelos generados. Se nota una gran disminución del número de variables a emplear, cerca de 12 variables en el peor de los casos y alrededor de 2 a 3 variables en los mejores modelos.

En la Ilustración 13, se muestran los resultados obtenidos al evaluar las técnicas empleadas para la búsqueda de mejores variables del MGB, de la acción de “Bimbo”, la primer métrica (Distribución), se observa una cercanía al Pareto óptimo (valor cercano a 1), mayor en el GA, y en las siguientes métricas, donde se espera obtener un valor cercano a 0, un mejor desempeño por parte del GA, exceptuando el Hipervolumen, estos resultados del desempeño pueden ser mejorados en un trabajo posterior, ajustando el algoritmo de búsqueda usado.

Ilustración 12. Tabla comparativa del número de variables a usar en cada acción (*stock*)

1	10	2	6	7
2	9	2	5	5
3	7	1	4	4
4	7	2	4	4
5	9	2	6	6
6	13	2	5	5
7	7	1	4	4
8	5	1	3	3
9	9	4	6	5
10	9	2	6	6
11	9	2	5	4
12	11	2	6	7

En la Ilustración 14 se muestran los frentes de Pareto obtenidos del modelo multiobjetivo utilizando GA y HS respectivamente, en las cuales podemos observar los puntos próximos a la curva del frente de Pareto óptimo. A pesar de obtener una capacidad de predicción satisfactoria, y un error aceptable, las técnicas heurísticas usadas pueden ser mejoradas, para así, llegar a obtener valores de predicción más acertados y lograr un mejor resultado en sus métricas de desempeño. En la Ilustración 15, se exponen los resultados resumidos de las medidas del desempeño de ambos algoritmos, para la búsqueda de parámetros del modelo generado para cada acción, 1 representa un buen desempeño, 0 menor que el obtenido, y -1 un mal desempeño.

Ilustración 13. Tabla de medidas del desempeño de algoritmos multiobjetivo

Métrica	Algoritmo	Máximo	Mínimo	Promedio	Mediana	Varianza	Desviación estándar
Distribución	HS	0.89331447	0.73627844	0.81479645	0.81479645	1.23E-02	0.11104125
	GA	0.9375684	0.92663061	0.9320995	0.9320995	5.98E-05	0.00773418
Distancia Generacional Inversa	HS	0.27314163	0.10430499	0.18872331	0.18872331	0.01425291	0.11938554
	GA	0.1548839	0.07730731	0.1160956	0.1160956	0.00300906	0.05485493
Space	HS	0.34250562	0.296266	0.31938581	0.31938581	0.00106905	0.03269635
	GA	0.2185164	0.03603323	0.12727482	0.12727482	1.67E-02	0.12903508
Hipervolumen	HS	0.39362027	0.31168131	0.35265079	0.35265079	0.003357	0.05793959
	GA	0.47255828	0.33761021	0.40508424	0.40508424	9.11E-03	0.0954227

Ilustración 14. Frente de Pareto del modelo con GA (izquierda) y HS (derecha).

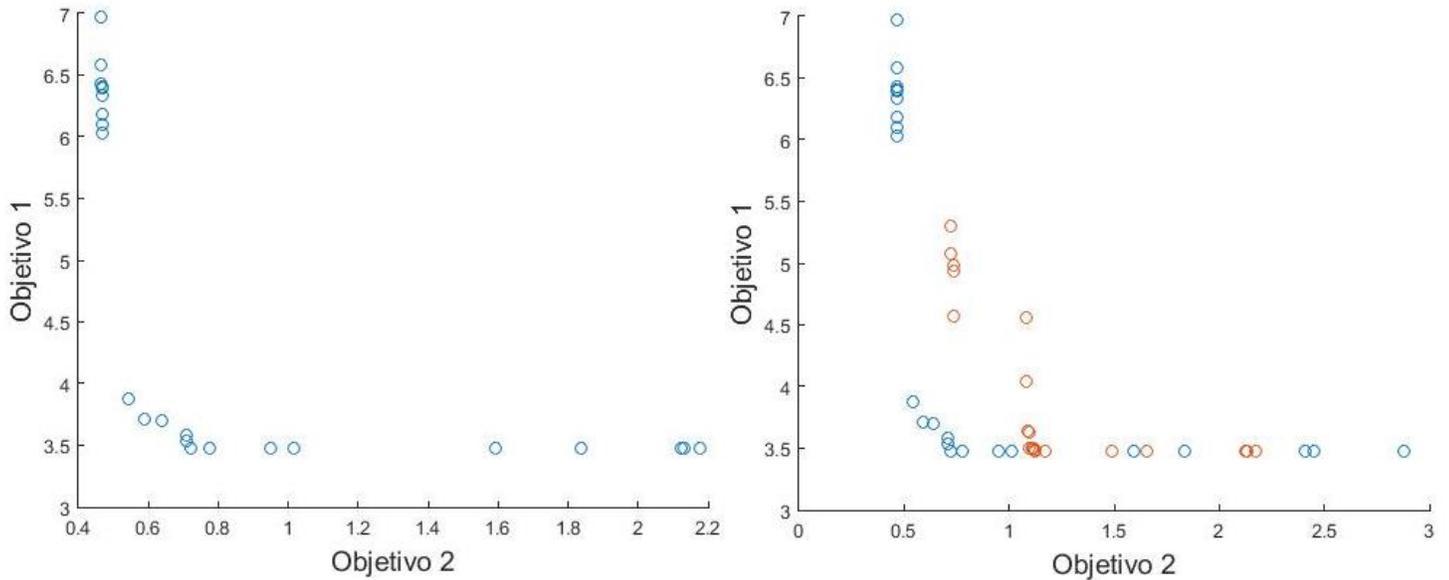


Ilustración 15. Resultados del desempeño de ambos algoritmos

Acción	Alea	Amxl	Bimbo	Cemex	Cocacola emsakofi	femsaubd	Gbanorte	Gcarso	Ginbursa	Gmexico	Televisa PO	Walmex
BH	0	1	0	-1	-1	-1	-1	0	-1	-1	0	-1
AG	1	0	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

6. Conclusiones

La metodología propuesta en este trabajo ha mostrado una alta flexibilidad para el filtrado y pronóstico de datos a partir de la concatenación sinérgica de dos modelos de optimización. Destacando que la primera fase permite identificar el conjunto de variables predictoras importantes reduciendo a 5% las variables de la base de datos ampliada. Por otro lado, el proceso de calibración de los modelos mejora el comportamiento de las funciones de pronóstico generando datos ajustados y cercanos a los datos reales.

Se desarrolló un modelo multiobjetivo para la predicción de los precios de las acciones, donde se logró minimizar el número de variables de entrada, maximizar la correlación lineal y minimizar el error sobre el conjunto de datos de entrenamiento y de prueba, de los cuales se obtuvo un buen resultado. En este trabajo se aporta una base de datos del histórico de acciones representativas de la BMV con indicadores técnicos, del periodo comprendido de 2006 a 2016, esta se limpió de valores faltantes y se procesó para poder ser manipulada con mayor facilidad. La base de datos se amplió utilizando funciones, contando al final con

132 variables, las cuales se redujeron a través del proceso de recocido simulado entre 3 a 9 variables en la mayoría de los casos.

De esta manera se determinaron las variables con mayor influencia para la predicción del precio en cada acción, en el periodo comprendido. Con esta nueva base de datos de variables seleccionadas, se implementó el MGB, para la predicción de precios, con dos metaheurísticas, GA y HS, las cuales tuvieron un buen desempeño en la predicción, de estas dos técnicas, Búsqueda Armónica obtuvo mejores resultados para la construcción del MGB, y mejorando los resultados en la predicción. Se generaron modelos ad hoc para cada una de las acciones analizadas, los resultados de selección para cada una de las variables están disponibles en “<http://bit.ly/396h3J1>”. Como se mostró en las tablas de hipervolumen y distancia generacional invertida, ambas técnicas resultan eficientes para resolver el problema multiobjetivo. Sin embargo cabe destacar que el mejor comportamiento lo presenta Búsqueda Armónica, las áreas de oportunidad para futuros trabajos involucran adaptar los procedimientos de restricciones ϵ con los presentados en este trabajo para mejorar la calidad de los resultados y mejorar el frente de Pareto obtenido. Con base en la interpretación de los resultados obtenidos, se concluye que la hipótesis fue aceptada.

Referencias Bibliográficas

- Abo-Hammour, Z. S., Alsmadi, O. M. K., Al-Smadi, A. M., Zaqout, M. I., & Saraireh, M. S. (2012). ARMA model order and parameter estimation using genetic algorithms. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 18(2), 201–221. Taylor & Francis . Retrieved October 1, 2019, from <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/13873954.2011.614068>
- Agichtein, E., Brill, E., Dumais, S., & Ragno, R. (2006). Learning user interaction models for predicting web search result preferences. *Proceedings of the Twenty-Ninth Annual International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval* (Vol. 2006, pp. 3–10).
- Cerezo, P. (2016, December). La Generación Z y la información. *Revista de Estudios de Juventud. Los auténticos nativos digitales: ¿estamos preparados para la Generación Z?*, 95–109. Madrid. Retrieved from <http://www.injuve.es/sites/default/files/2017/29/publicaciones/revistainjuve114.pdf>
- Chakrabarti, P., & Guhathakurata, K. (2019). Which is the right option for Indian market: Gaussian, normal inverse Gaussian, or Tsallis? *IIMB Management Review*, 31(3), 238–249. Elsevier Ltd.
- Chen, K.-Y. (2007). Forecasting systems reliability based on support vector regression with genetic algorithms. *Reliability Engineering & System Safety*, 92(4), 423–432. Elsevier. Retrieved October 1, 2019, from <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951832006000147>
- Choudhry, R., & Garg, K. (2008). A Hybrid Machine Learning System for Stock Market Forecasting. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 2(15), 315–318.
- Comisión Nacional de Vivienda. (2016, October 25). La BMV ofrece una gran oportunidad de crecimiento para empresas del sector vivienda. Ciudad de México. Retrieved from <https://www.gob.mx/conavi/prensa/la-bmv-ofrece-una-gran-oportunidad-de-crecimiento-para-empresas-del-sector-vivienda?idiom=es>
- de-los-Cobos-Silva, S. G., Mora-Gutiérrez, R. A., Gutiérrez-Andrade, M. A., Rincón-García, E. A., Ponsich, A., & Lara-Velázquez, P. (2018). Development of seven hybrid methods based on collective intelligence for solving nonlinear constrained optimization problems. *Artificial Intelligence Review*, 49(2), 245–279. Springer Netherlands.
- Dehghani, H., & Bogdanovic, D. (2018). Copper price estimation using bat algorithm. *Resources Policy*, 55, 55–61. Elsevier Ltd.
- Díaz Gandasegui, V. (2011). Mitos y realidades de las redes sociales. *Información y comunicación en la Sociedad de la Información. Prisma Social: revista de ciencias sociales*, (6), 340–366. Retrieved February 26, 2020, from <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3686439>
- Economática. (n.d.). *Economática.com*. Retrieved October 23, 2019, from <https://economática.com/>
- Elsevier. (n.d.). *ScienceDirect*. Retrieved March 3, 2020, from <https://www.sciencedirect.com/>

- Ervural, B. C., Beyca, O. F., & Zaim, S. (2016). Model Estimation of ARMA Using Genetic Algorithms: A Case Study of Forecasting Natural Gas Consumption. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 235, 537–545. Elsevier. Retrieved October 1, 2019, from <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042816316007>
- F.R.S., K. P. (1901). LIII. On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 2(11), 559–572. Taylor & Francis. Retrieved from <https://doi.org/10.1080/14786440109462720>
- Fonseca, M. N., Pamplona, E. de O., Valerio, V. E. de M., Aquila, G., Rocha, L. C. S., & Rotela Junior, P. (2017). Oil price volatility: A real option valuation approach in an African oil field. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 150, 297–304. Elsevier B.V.
- Holland, J. H. (1975). *Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. Oxford, England: U Michigan Press.
- Hu, Y., Volinsky, C., & Koren, Y. (2008). Collaborative filtering for implicit feedback datasets. *Proceedings - IEEE International Conference on Data Mining, ICDM* (pp. 263–272). Retrieved March 9, 2020, from <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.167.5120>
- Jolliffe, I.T. (2002). *Principal Component Analysis* (2nd ed.). Springer-Verlag New York. Retrieved March 5, 2020, from <https://www.springer.com/gp/book/9780387954424#otherversion=9780387224404>
- Jolliffe, Ian T. (1990). PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS: A BEGINNER'S GUIDE — I. Introduction and application. *Weather*, 45(10), 375–382. John Wiley & Sons, Ltd. Retrieved March 5, 2020, from <http://doi.wiley.com/10.1002/j.1477-8696.1990.tb05558.x>
- Juárez Hernández, L. G., & Ponce Lopez, I. (2019). Construcción y validación de un instrumento para evaluar el abordaje de la sociedad del conocimiento en docentes. *Apuntes Universitarios*, 10(1), 40–66. Retrieved February 26, 2020, from <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7237431>
- Kara, Y., Acar Boyacioglu, M., & Baykan, Ö. K. (2011). Predicting direction of stock price index movement using artificial neural networks and support vector machines: The sample of the Istanbul Stock Exchange. *Expert Systems with Applications*, 38(5), 5311–5319.
- Madero Suarez, I. P., & Gómez López, L. F. (2013). El proceso de comprensión lectora en alumnos de tercero de secundaria. *Revista Mexicana de Investigacion Educativa*, 18(56), 113–139. Retrieved February 26, 2020, from http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-66662013000100006
- Mason, C. F., & Wilmot, N. A. (2016). Price discontinuities in the market for RINs. *Journal*

- of Economic Behavior and Organization, 132, 79–97. Elsevier B.V.
- Montuschi, L. (2001). Datos, Información y Conocimiento. De la Información a la Sociedad del Conocimiento. Retrieved from <https://econpapers.repec.org/RePEc:cem:doctra:192>
- Muñoz Poblete, C. (2013). Métodos mixtos: una aproximación a sus ventajas y limitaciones en la investigación de sistemas y servicios de salud. *Revista Chilena de Salud Pública*, 17(3), 218–223. Universidad de Chile.
- Nair, B. B., Mohandas, V. P., & Sakthivel, N. R. (2010). A Decision tree- Rough set Hybrid System for Stock Market Trend Prediction. *International Journal of Computer Applications*, 6(9), 1–6. Retrieved October 1, 2019, from <http://www.ijcaonline.org/volume6/number9/pxc3871449.pdf>
- Ntemi, M., & Kotropoulos, C. (2020). A dynamic dyadic particle filter for price prediction. *Signal Processing*, 167. Elsevier B.V.
- Patel, J., Shah, S., Thakkar, P., & Kotecha, K. (2015). Predicting stock market index using fusion of machine learning techniques. *Expert Systems with Applications*, 42(4), 2162–2172. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417414006551>
- Pérez Fernández, D., Cortés López, J. C., & Villanueva Micó, R. (2015). Cálculo estocástico en finanzas: Aplicación del Modelo Browniano activo subyacente FCC.MC en el IBEX-35. Universidad Politécnica de Valencia. Retrieved November 27, 2019, from <http://cotizacion.imm.upv.es/Dani>
- Quiroga, L. M. (2005). Sistemas de filtrado: un puente tecnológico entre la oferta y demanda de información en línea al servicio de la toma de decisiones. *Las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación (TIC) y la institucionalidad social: hacia una gestión basada en el conocimiento-LC/L*, 49–57. Retrieved February 26, 2020, from <https://repositorio.cepal.org/handle/11362/6109>
- Rennie, J. D. M., & Srebro, N. (2005). Fast Maximum Margin Matrix Factorization for collaborative prediction. *ICML 2005 - Proceedings of the 22nd International Conference on Machine Learning* (pp. 713–720).
- Rodríguez Gómez, D. (2006). Modelos para la creación y gestión del conocimiento: una aproximación teórica. *Educar* (Vol. 37).
- Rubio Guerrero, G. (2017). Perspectiva multivariante de los pronósticos en las pymes industriales de Ibagué (Colombia). *Revista Facultad de Ciencias Económicas*, (2), 25–40. Retrieved February 26, 2020, from <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6128520>
- Sikora, G., Michalak, A., Bielak, Ł., Miśta, P., & Wyłomańska, A. (2019). Stochastic modeling of currency exchange rates with novel validation techniques. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 523, 1202–1215. Elsevier B.V.
- Song, Y., Liu, T., Liang, D., Li, Y., & Song, X. (2019). A Fuzzy Stochastic Model for Carbon Price Prediction Under the Effect of Demand-related Policy in China's Carbon Market. *Ecological Economics*, 157, 253–265. Elsevier B.V.

- Tobón, S., Guzmán, C. E., Silvano Hernández, J., & Cardona, S. (2015). Sociedad del conocimiento: Estudio documental desde una perspectiva humanista y compleja. *Paradigma*, 36(2), 7–36. Retrieved February 26, 2020, from http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512015000200002
- Yannakakis, G. N. (2009). Preference learning for affective modeling. *Proceedings - 2009 3rd International Conference on Affective Computing and Intelligent Interaction and Workshops, ACII 2009*. Retrieved March 9, 2020, from <https://www.researchgate.net/publication/224088130>
- Yeh, C. Y., Huang, C. W., & Lee, S. J. (2011). A multiple-kernel support vector regression approach for stock market price forecasting. *Expert Systems with Applications*, 38(3), 2177–2186.
- Zong Woo, G., Kim, J. H., & Loganathan, G. V. (2001). A New Heuristic Optimization Algorithm: Harmony Search. *Simulation*, 76(2), 60–68. Sage PublicationsSage CA: Thousand Oaks, CA. Retrieved October 1, 2019, from <http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/003754970107600201>

ANEXO 1

En este trabajo se emplearon estas funciones para ampliar la base de datos inicial.

X^2	El valor de X elevado al cuadrado
X^3	El valor de X elevado al cubo
$\begin{cases} \log(X), X \neq 0 \\ 0, X = 0 \end{cases}$	Logaritmo del valor absoluto de X , para X distinto de cero
X^{-1}	El valor de X elevado a la menos 1
X^{-2}	El valor de X elevado a la menos 2
X^{-3}	El valor de X elevado a la menos 3
$X_i X_j \{i \neq j\}$	El producto de $X_i X_j$, siempre que i no sea igual a j
$\sin X$	El seno del valor de X
$\cos X$	El coseno del valor de X
$ \sqrt{X} $	El valor absoluto de la raíz cuadrada de X
$\begin{cases} \frac{1}{X}, X \neq 0 \\ 0, X = 0 \end{cases}$	El cociente de 1 sobre el valor de X , para X distinto de cero
$\begin{cases} \frac{1}{\log X }, \log X \neq 0 \\ 0, X = 0 \end{cases}$	El cociente de 1 sobre el valor del logaritmo del valor absoluto de X , siempre que el logaritmo del valor absoluto de X sea distinto de cero
$\begin{cases} \frac{1}{1 - e^{- X }}, 1 - e^{- X } \neq 0 \\ 0, 1 - e^{- X } X = 0 \end{cases}$	El cociente de 1 sobre 1 menos la constante e elevado a la menos el valor absoluto de X , siempre que 1 menos la constante e elevado a la menos el valor absoluto de X sea distinto de cero