

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Licenciatura en Ingeniería en Computación

“Sistema para la simulación de desplazamientos horizontales en edificios, como respuesta a un sismo”

Alumno: José Duvali Peñaloza García

Matrícula: 204204226

Asesor: M. en C. José Alfredo Estrada Soto.

Resumen

El presente trabajo se centra en la programación de un cálculo estructural para diseño y revisión del comportamiento sísmico de edificios, mediante la simulación de los desplazamientos laterales de los entrepisos. El programa se desarrolló totalmente en MATLAB, y los resultados obtenidos con el mismo, fueron calibrados con un programa comercial SAP V14. Obteniendo de la calibración resultados satisfactorios.

Contenido

1. Tutorial de sistema de múltiples grados de libertad. (SMGDL).....	4
2. Bases de cálculo y referencia de programación.....	9
3. Fuentes de la programación.....	32
4. Comparación y resultados.....	42
5. Conclusiones.....	57
6. Bibliografía.....	58

1. Tutorial de SMGDL

(Sistema de Múltiples Grados de Libertad)

1.1. Interfaz Principal

El sistema está conformado por cinco secciones, en las cuales se podrán realizar cambios referentes a la estructura de análisis, a las gráficas de respuesta estructural, sismo o modos de vibrar, pudiendo mover cada uno por separado con sus propiedades independientes. La interfaz se muestra en la figura 1.1

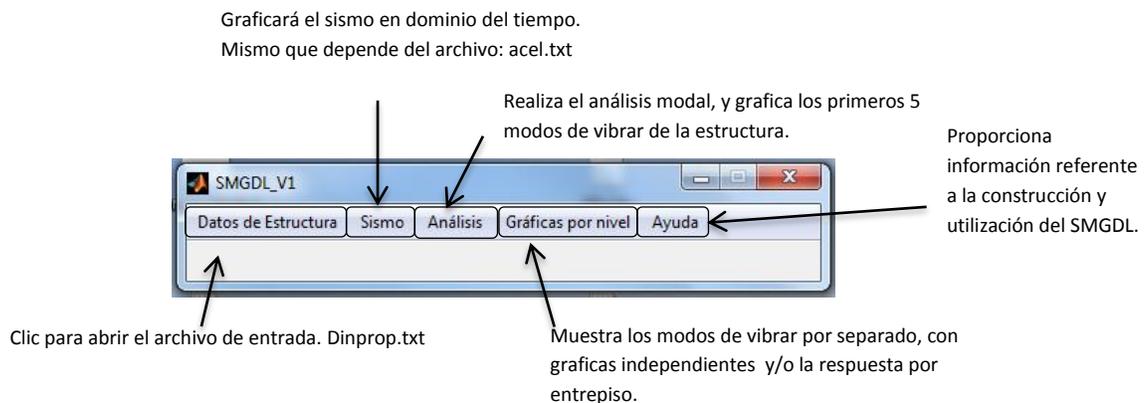


Figura 1.1. Interfaz principal

1.2. Información de aplicaciones

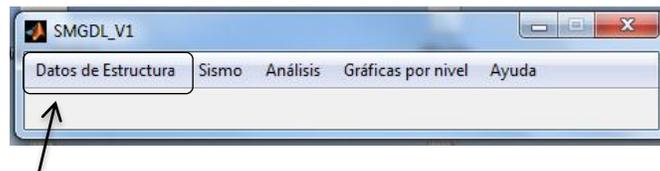
El sistema de múltiples grados de libertad por sus siglas SMGDL, fue creado para identificar los primeros cinco modos de vibrar de un edificio o estructura construida a base de marcos de carga, así como los desplazamientos máximos alcanzados en cada uno de ellos, producto de una excitación o sismo, el sistema tiene un impacto fundamental en materias como ingeniería sísmica y estructural que se desprende de la carrera de Ingeniería civil.

Es común encontrar software que modela el comportamiento los edificios, tales como Staad, SAP, Etabs por citar algunos, sin embargo el costo de las licencias generalmente resulta elevado si solo necesitas información sobre modos de vibrar y respuesta del edificio.

En el siguiente tutorial se mostrarán las bases para poder analizar un edificio de N número de entrepisos, así como entender los resultados que arroja el sistema. Cabe señalar que el SMGDL fue desarrollado en un ambiente de MATLAB, desde la programación hasta el desarrollo de las interfaces.

1.3. Entrada de datos

Para definir la entrada de datos solo es necesario abrir la pestaña que se ubica en la parte superior izquierda del SMGDL.



Clic para abrir el archivo de entrada. Dinprop.txt

El edificio por analizar se debe llevar a una simplificación geométrica, para expresar la información de entrada con datos como: *masa*, *rigidez de entrepiso*, *amortiguamiento*, *Tiempo inicial*, *Incremento de Tiempo* y *Periodo de Estructura* dichos datos se deberán incluir en un archivo de texto con el nombre de *Dinprop.txt* (Propiedades dinámicas de estructura). El formato en el que se debe introducir dicha información se muestra en la figura 1.3.

La simplificación del edificio es un esquema que se enmarca en las bases de este tutorial a partir de la página 9, y cuyo esquema aparece en la figura 1.2 donde se muestra como un oscilador simple y cuyas características proveen de información al SDMGDL, para que pueda llevar acabo la desintegración de los modos de vibrar y el acoplamiento de los mismos con la excitación o sismo, logrando con esto conocer la respuesta del edificio por modo y por entrepiso.

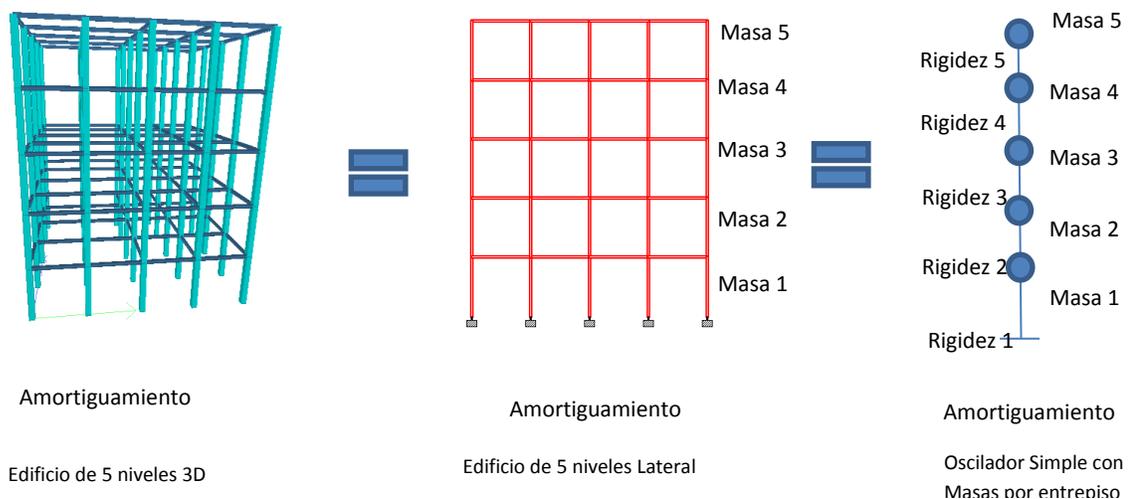


Figura1.2. Proceso de simplificación

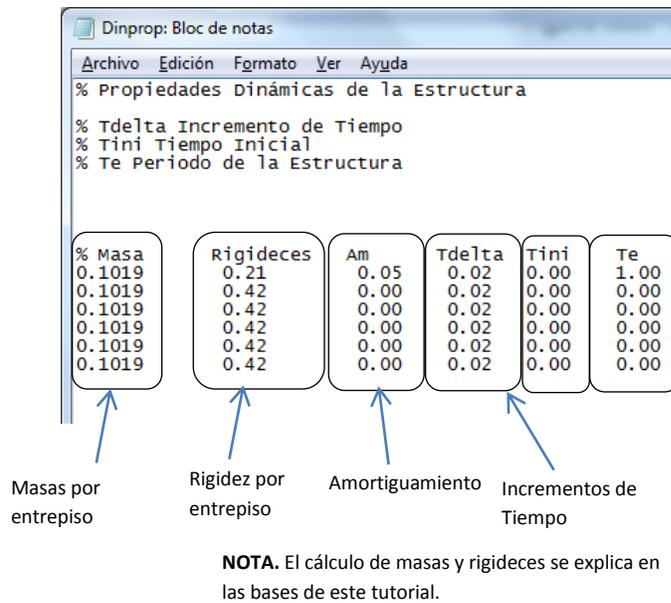


Figura 1.3 Formato de propiedades dinámicas de estructura

1.4.Datos de Sismo

Graficará el sismo en dominio del tiempo.
 Mismo que depende del archivo: acel.txt

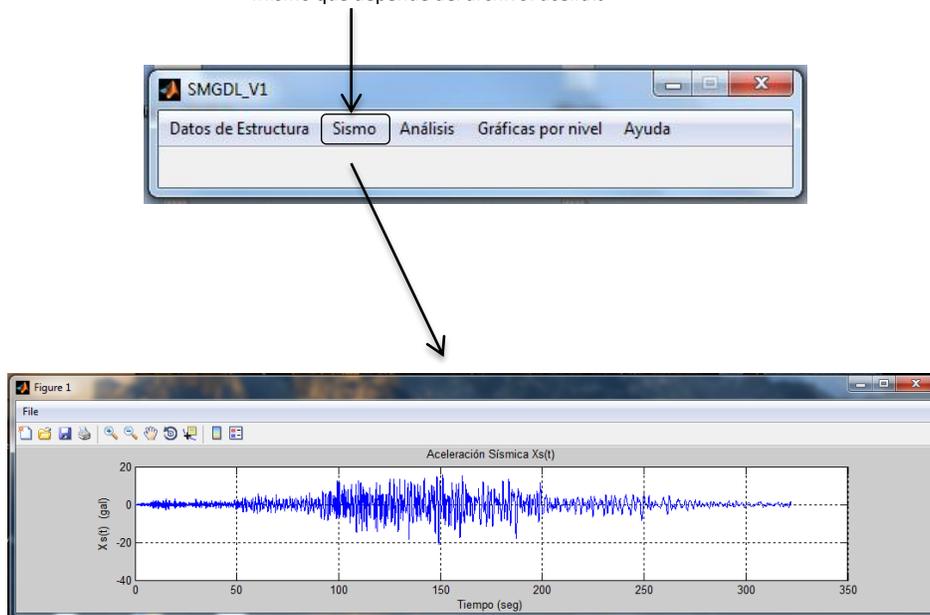
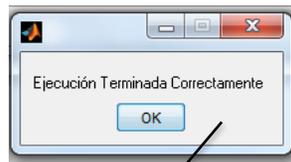


Figura 1.4. Sismo de 1985 México DF.

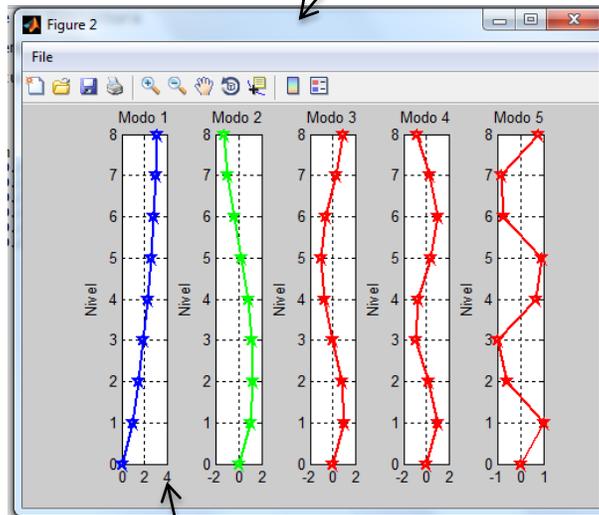
Se muestra en la figura 1.4. el acelerograma del sismo con mayor impacto en la ciudad de México, el cual ha servido como referencia de expectativas de análisis y diseño sísmico de edificios en México. Dicho acelerograma fue obtenido de las bases de datos de la SCT, el archivo se presenta como un vector cargado en un archivo de texto y que para la programación del SMGDL se nombró como *acel.txt*, dicho archivo es necesario ubicarlo en la misma carpeta en la que se encuentra el ejecutable del SMGDL.

1.5. Ejecución de análisis

Realiza el análisis modal, y grafica los primeros 5 modos de vibrar de la estructura.



Una vez que se determine que los archivos *Dinprop.txt*, y *acel.txt* están en la misma carpeta, y que todo está en orden. El SMGDL lanza un mensaje de texto indicando que el análisis ha terminado correcto y graficará los modos de vibrar principales.



Cada gráfica corresponde a un modo de vibrar, que por lo general, la mayor participación modal se consigue entre los primeros tres modos, sin embargo se determina necesario usar cinco, para cumplir con un aporte mayor al 95%.

1.6. Gráficas

Las gráficas producto del análisis modal realizado se pueden entender por separado, es decir ver cada modo en un esquema independiente, este proceso se realiza haciendo clic en la pestaña de --> *gráficas* y posteriormente en *modos* → de los cuales se puede seleccionar alguno de entre los cinco primeros principales. Tal como se muestra en la figura 1.5.

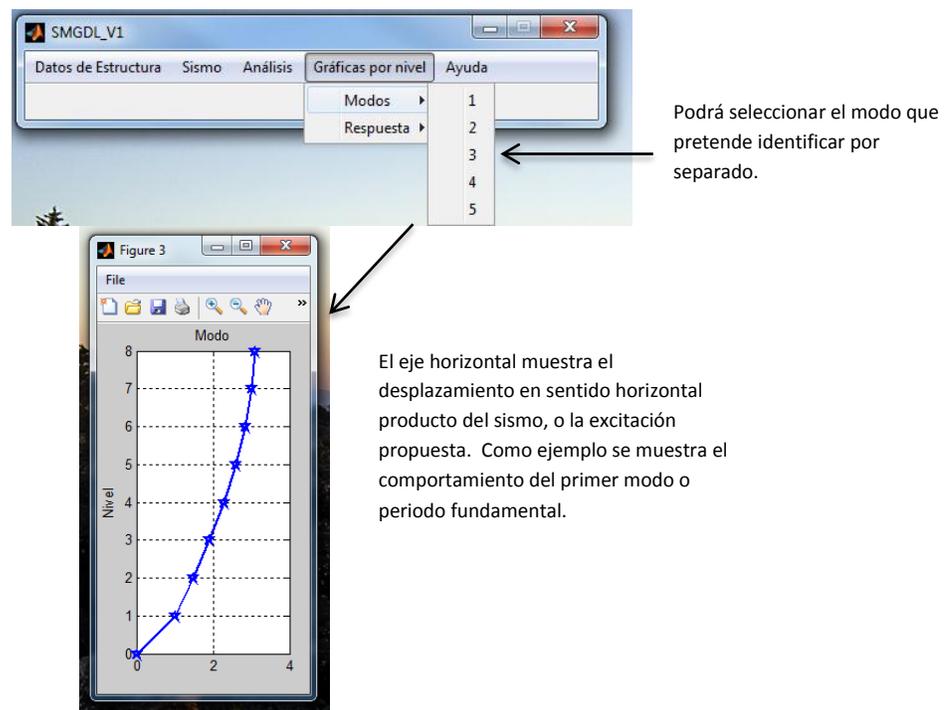


Figura 1.5. Modos de vibrar independientes.

Respecto al análisis de la estructura para conocer su respuesta, es el mismo proceso anterior a diferencia que la selección se realiza sobre la respuesta por nivel del edificio. Como se muestra en la figura 1.6.

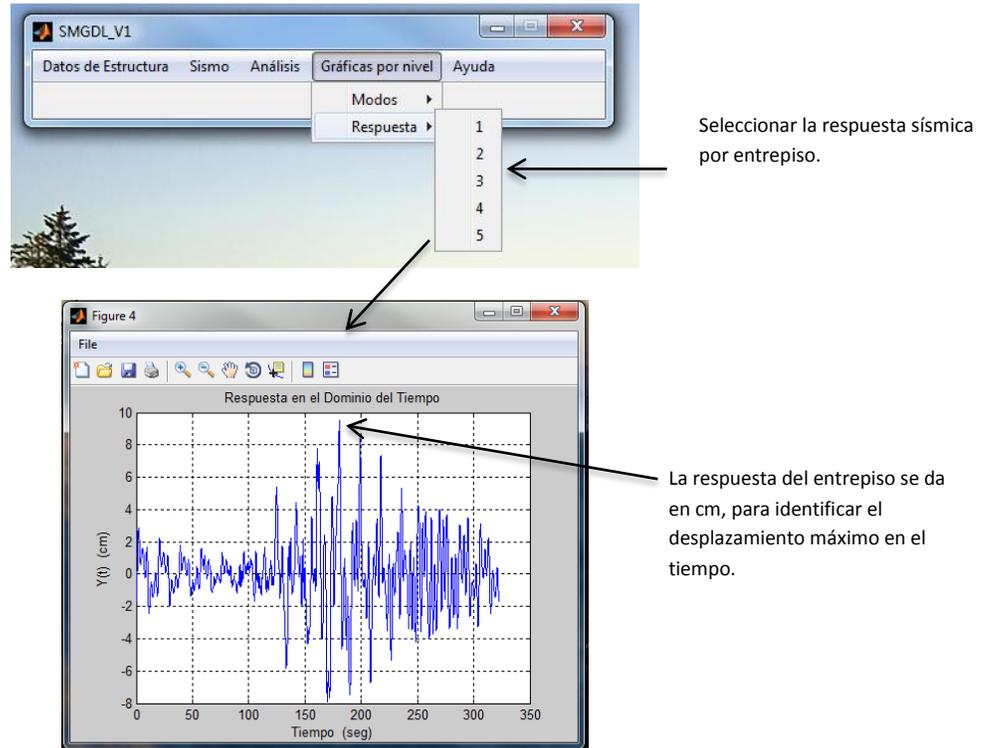


Figura 1.6. Selección de Respuesta sísmica por entreciso

2. Bases de cálculo y referencia de programación

2.1. Grados de libertad dinámicos

Desde el punto de vista dinámico, interesan los grados de libertad en los que se generan fuerzas generalizadas de inercia significativas; es decir fuerzas iguales a masa por aceleración o momento de inercia por aceleración angular. Por ejemplo en la figura 2.1 se muestra un marco con 12 grados de libertad estáticos, sin embargo si las fuerzas de inercia importantes son solamente las que generan las masas m_1 y m_2 al moverse lateralmente y las deformaciones de los pisos en su plano son despreciables, tenemos un sistema de dos grados de libertad dinámicos, que son precisamente los desplazamientos 1 y 2 en la figura antes citada. Es importante observar que esto no implica que los restantes giros y desplazamientos se anulen, sino que, aunque asumen valores distintos de cero, no generan fuerzas de inercia de consideración.2.

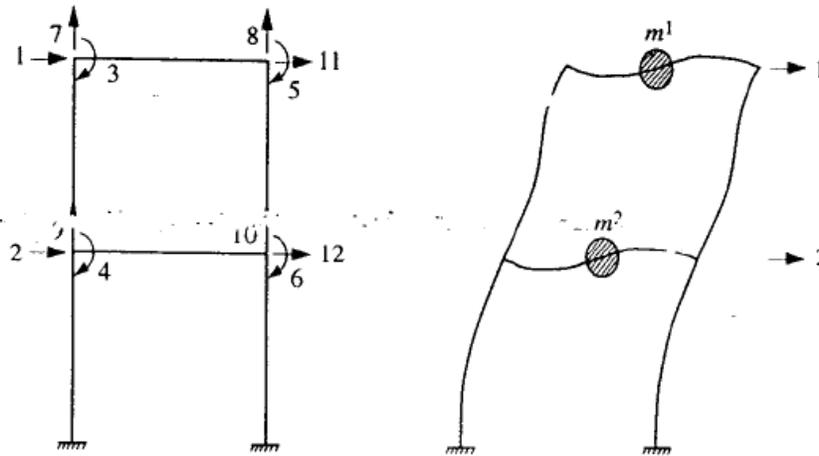


Figura 2.1 Grados de libertad estáticos y dinámicos.

En edificios generalmente se supone que los pisos son diafragmas rígidos en su plano, lo que permite expresar el movimiento lateral de cualquier punto del piso en términos de 3 grados de libertad: dos desplazamientos horizontales y un giro alrededor de su eje vertical como se muestra en la figura 2.1. En vista de que las masas están directamente soportadas por los pisos, es también aceptable suponer que todas las masas están concentradas en los mismos, de manera que las fuerzas de inercia generadas por los desplazamientos laterales se pueden expresar como productos de la masa en cada piso por sus aceleraciones lineales y del momento de inercia de dicha masa por la aceleración angular alrededor del eje vertical que pasa por el centro de las masas. Esto permite efectuar el análisis dinámico de un edificio con modelos que tienen 3 grados de libertad por piso.

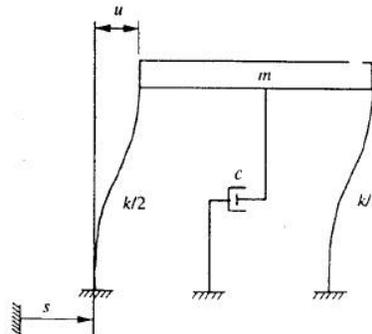


Figura 2.2 Sistema simple de amortiguamiento viscoso

Cuando por simetría no rotan alrededor de ejes verticales, el edificio o sus componentes se pueden modelar como un sistema de un grado de libertad (desplazamiento lateral) por piso. Nótese que la hipótesis que los pisos son diafragmas rígidos implica que las vigas no tienen deformaciones axiales: tal sería el caso del marco de la figura 2.2. Recordando que la matriz de rigideces de este marco es de 12×12 , se puede transformar en una matriz de rigideces lateral de 2×2 , expresada en función de los grados de libertad 1 y 2, mediante el

proceso de condensación estática. De esta manera la matriz de rigideces y de masas corresponden a los mismos grados de libertad.

2.2. Sistemas lineales de un grado de libertad

2.2.1. Descripción y ecuación de equilibrio dinámico.

Consideremos el sistema de un piso mostrado en la figura 2.2, constituido por una masa concentrada que puede tener un desplazamiento horizontal u , ligado al terreno mediante varios elementos verticales representados esquemáticamente por dos columnas elásticas y por un amortiguador. Cuando el terreno experimenta un desplazamiento horizontal s , en la ecuación de equilibrio dinámico aparece la fuerza de inercia, igual a la masa por su aceleración absoluta \ddot{x} , la fuerza de rigidez y la de amortiguamiento. En el caso más sencillo, las fuerzas de rigidez y de amortiguamiento son, respectivamente, proporcionales al desplazamiento u y a la velocidad \dot{u} de la masa con respecto a su base. Sean k y c las correspondientes constantes de proporcionalidad que se supone que no cambian con el tiempo; k es lo mismo que la matriz de rigidez lateral (en este caso de 1×1) y c se llama coeficiente o relación de amortiguamiento. El conjunto de m , c y k constituye un sistema lineal de un grado de libertad, con amortiguamiento viscoso o lineal; usando el principio de D'Alembert, la ecuación diferencial de equilibrio dinámico o de movimiento es

$$m\ddot{x} + c\dot{u} + ku = 0$$

El punto sobre una cantidad significativa derivación con respecto al tiempo. Considerando que $x = s + u$, la ecuación anterior se escribe

$$m\ddot{x} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{s} \quad (2.1)$$

Dividiendo esta ecuación entre m y definiendo $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $c_{cr} = 2\sqrt{km}$ y $\zeta = c/c_{cr}$ se llega a:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2u = -\ddot{s} \quad (2.2)$$

ω se denomina frecuencia circular natural del sistema; c_{cr} se conoce como amortiguamiento crítico, que usualmente se expresa como porcentaje. De las definiciones de ω y c_{cr} deducimos que $c_{cr} = 2m\omega$, lo cual muestra que el amortiguamiento crítico está relacionado con la frecuencia fundamental de vibración.

Tabla 2.1 Aplicación del método β de Newmark ($\beta = 1/4$) al sistema de la figura 2.2

t (Seg)	u Exacta	Resultados numéricos						
		u	v	a	Δx^*	Δu	Δv	Δa
0.00	1.0000	1.0000	0.0000	-1.0000	-2.0000	-0.0050	-0.0993	0.0149
0.10	0.9950	0.9950	-0.0993	-0.9851	-5.9603	-0.0148	-0.0973	0.0245
0.20	0.9802	0.9802	-0.1965	-0.9606	-9.8221	-0.0244	-0.0944	0.0338
0.30	0.9559	0.9559	-0.2909	-0.9268	-13.5481	-0.0336	-0.0905	0.0427
0.40	0.9223	0.9223	-0.3815	-0.8841	-17.1027	-0.0424	-0.0859	0.0510
0.50	0.8799	0.8798	-0.4673	-0.8331	-20.4522	-0.0507	-0.0804	0.0588
0.60	0.8292	0.8291	-0.5477	-0.7743	-23.5655	-0.0585	-0.0741	0.0659
0.70	0.7707	0.7706	-0.6218	-0.7084	-26.4140	-0.0655	-0.0672	0.0723
0.80	0.7052	0.7050	-0.6890	-0.6361	-28.9720	-0.0719	-0.0597	0.0779
0.90	0.6334	0.6332	-0.7488	-0.5583	-31.2171	-0.0775	-0.0517	0.0826
1.00	0.5560	0.5557	-0.8005	-0.4757	-33.1500	-0.0822	-0.0432	0.0865
1.10	0.4738	0.4735	-0.8437	-0.3891	-34.6951	-0.0861	-0.0344	0.0895
1.20	0.3878	0.3874	-0.8781	-0.2996	-35.9003	-0.0891	-0.0254	0.0916
1.30	0.2988	0.2983	-0.9035	-0.2080	-36.7373	-0.0912	-0.0162	0.0928
1.40	0.2077	0.2072	-0.9197	-0.1152	-37.2012	-0.0923	-0.0069	0.0930
1.50	0.1154	0.1148	-0.9265	-0.0222	-37.2914	-0.0925	0.0024	0.0923
1.60	0.0229	0.0223	-0.9241	0.0701	-37.0105	-0.0918	0.0115	0.0907
1.70	-0.0688	-0.0695	-0.9126	0.1608	-36.3650	-0.0902	0.0205	0.0882
1.80	-0.1590	-0.1598	-0.8921	0.2490	-35.3650	-0.0878	0.0291	0.0848
1.90	-0.2468	-0.2475	-0.8630	0.3338	-34.0239	-0.0844	0.0374	0.0807
2.00	-0.3312	-0.3319	-0.8256	0.4145	-32.3584	-0.0803	0.0452	0.0758
3.00	-0.8449	-0.8453	-0.1270	0.8580	-3.3881	-0.0084	0.0858	-0.0002
.....
4.00	-0.5722	-0.5714	0.6162	0.5097	25.7921	0.0640	0.0475	-0.0688
.....
5.00	0.1741	0.1758	0.7505	-0.2508	29.6671	0.0736	-0.0286	-0.0708
.....
6.00	0.6975	0.6984	0.2163	-0.7200	7.2536	0.0180	-0.0725	-0.0107

$m = 1.00$

$k = 1.00$

$\zeta = 0.05$

$c = 0.10$

$\omega = 1.00$

$\omega_a = 0.998749$

$\zeta\omega/\omega_a = 1.001252$

$\zeta\omega/\omega_a = 0.050062$

$u_0 = 1.00$

$u_0 = 0.00$

$\Delta t = 0.1$

$k^* = k + \frac{2c}{\Delta t} + \frac{4m}{\Delta t^2} = 403$, según la ecuación 2.5, la solución exacta es

$$u = \exp(-0.05t)\{0.050062 \operatorname{sen}(0.998749t) + \cos(0.998749t)\}$$

2.2.2. Vibraciones libres

El sistema descrito en la sección precedente vibra libremente cuando la masa se mueve, pero el terreno permanece inmóvil y no actúan fuerzas exteriores. En este caso el segundo miembro de la ecuación 2.2 se anula y su solución es:

$$u(t) = Ae^{-\xi\omega t} + \cos \omega_a (t-\gamma) \quad (2.3)$$

Donde

$$\omega_a = \omega\sqrt{1-\xi^2} \quad (2.4)$$

ω_a es la frecuencia natural amortiguada del sistema y A y γ son constantes que dependen de las condiciones iniciales, es decir, del desplazamiento y la velocidad cuando $t = 0$.

La ecuación 2.3 da $u(t) = A \cos \omega(t-\gamma)$ cuando no existe amortiguamiento ($\xi=0$), y se dice que la masa tiene un movimiento armónico. El tiempo T , que dura un ciclo de oscilación completo, se llama periodo de vibración natural del sistema y es igual a $2\pi/\omega$. Por otro lado, si el amortiguamiento es igual a el crítico ($\xi=1$), encontramos que $\omega_a = 0$ y, por tanto $u(t) = Ae^{-\xi\omega t}$, indicando que la masa se mueve sin oscilar y vuelve a la posición de equilibrio estático, $u=0$, luego de un tiempo infinito.

En el análisis de edificios es de mayor interés el caso de amortiguamientos menores que el crítico, para lo cual, si el desplazamiento y la velocidad de la masa en el instante $t=0$ valen, respectivamente u_0 y \dot{u}_0 , obtenemos:

$$u(t) = Ae^{-\xi\omega t} \{ (\dot{u}_0 + \xi\omega u_0)(\operatorname{sen} \omega_a t) + \omega_a u_0 \cos \omega_a t \} \quad (2.5)$$

Esta ecuación describe un movimiento oscilante de la masa con frecuencia ω_a y amplitud exponencial decreciente como se ilustra en la figura 2.2. El periodo amortiguado $T_a = 2\pi/\omega_a$, es el tiempo que tarda un ciclo completo de oscilación, y es una propiedad de la estructura, independiente de como se excite.

Normalmente, el amortiguamiento de estructuras de edificios no excede de 10% del crítico, o sea que típicamente $\xi < 0.1$. Aun para este límite relativamente alto, la ecuación 2.3 da $\omega_a = 0.995\omega$; de aquí se elige que en casos prácticos la influencia del amortiguamiento en la frecuencia de vibración es pequeña, siendo su efecto más importante disminuir la amplitud de dicha vibración conforme avanza el tiempo, según lo expresa el término exponencial de la ecuación 2.5 y se ilustra en la figura 2.2.

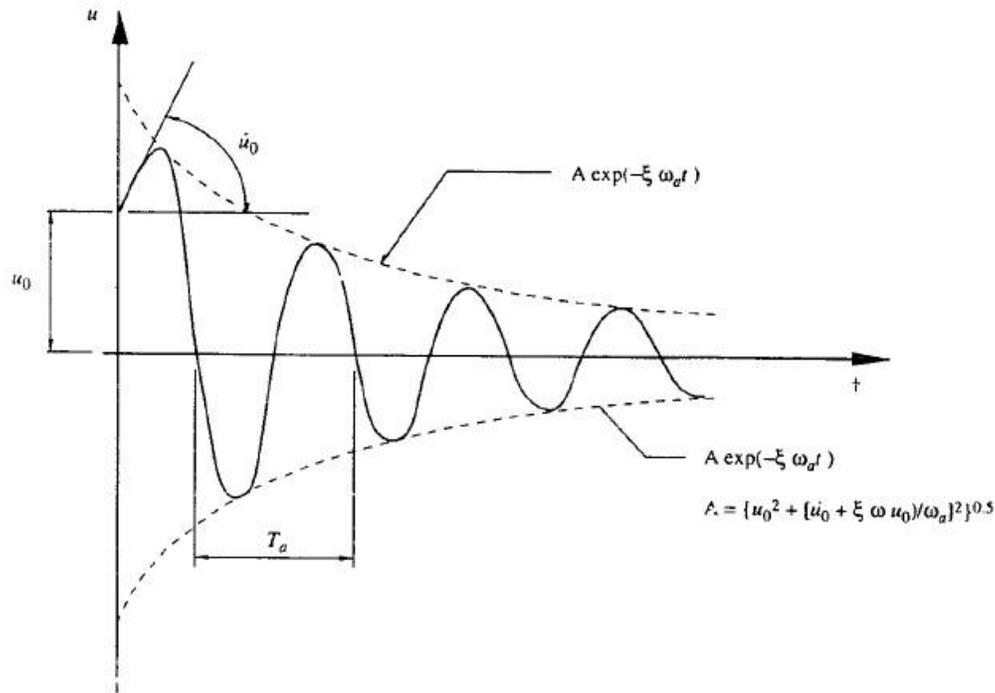


Figura 2.3 Vibraciones libres del sistema de la figura 2.2

2.2.3. Respuesta a movimientos del terreno

El segundo término \ddot{s} , de la ecuación 2.2 describe cómo varía la aceleración del terreno con el tiempo y se conoce como acelerograma. En textos de dinámica estructural se muestra que, cuando tal término es nulo, la solución de la ecuación aludida es:

$$u(t) = 1/\omega_d \int \ddot{s}(\tau) \exp \{ -\xi \omega (t - \tau) \} \sin \omega_d (t - \tau) d\tau \quad (2.6)$$

Esta expresión hace ver que, como en el caso de vibraciones libres, las dos propiedades de un sistema de un grado de libertad que determinan su respuesta ante un movimiento prescrito del terreno con su frecuencia natural y su fracción de amortiguamiento crítico. La velocidad y la aceleración de la masa se calculan derivando sucesivamente $u(t)$ con respecto al tiempo, y otras respuestas de interés, como la fuerza en el resorte se pueden obtener en términos del desplazamiento y sus derivadas. Para fines de diseño, interesan normalmente solo los valores máximos absolutos de tales respuestas.

2.3. Método paso a paso, método β de Newmark

Un acelerograma no es una función algebraica del tiempo, sino una serie de valores numéricos de la aceleración para diferentes instantes; usualmente a intervalos constantes de tiempo Δt , que varían entre 0.005 y 0.02 segundos. Para duraciones normales de temblores, entre 20 y 60 segundos, se tienen unos pocos millares de valores de la

aceleración. La figura 2.4 muestra el acelerograma registrado por la Secretaría de Comunicaciones y Transportes de la Ciudad de México durante el temblor del 19 de septiembre de 1985, incluyendo las historias de velocidad y desplazamiento que se obtuvieron integrando sucesivamente dicho acelerograma. Los valores máximos de aceleración, velocidad y desplazamiento de terreno son 168 cm/seg^2 , 60.5 cm/seg y 222 cm , respectivamente.

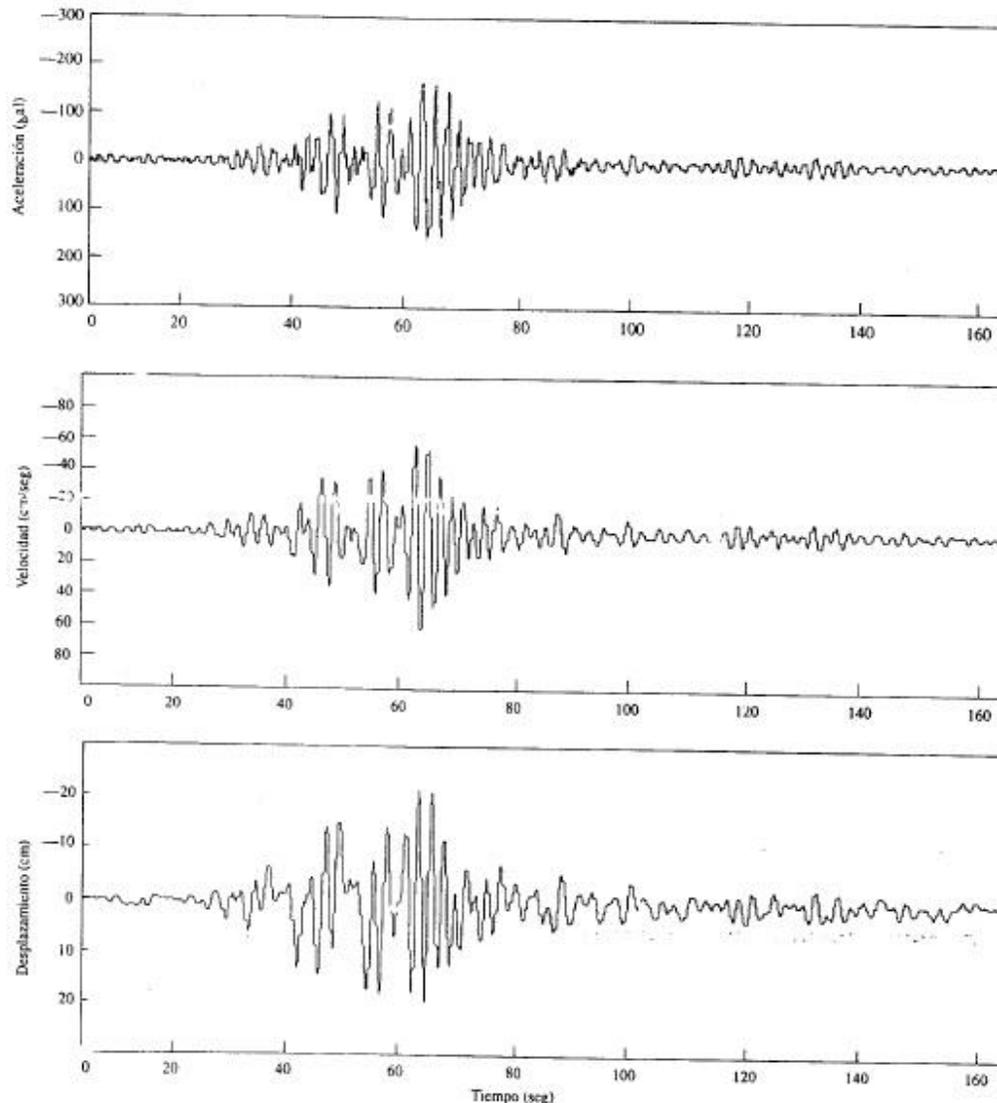


Figura 2.4 Aceleraciones, velocidades y desplazamientos del registro de la Secretaría de Comunicaciones y Transportes del temblor del 19 de septiembre de 1985

Dada la manera en que se expresan los acelerogramas, en vez de calcular algebraicamente la integral de la ecuación 2.6 es conveniente resolver numéricamente las ecuaciones de equilibrio dinámico con la ayuda de computadoras. Para este fin existe una amplia variedad de métodos consistentes en calcular la solución para $t + \Delta t$ a partir de la solución

ya conocida en t . estos métodos denominados paso a paso, pueden aplicarse tanto a estructuras lineales como a no lineales de cualquier número de grados de libertad, y están incorporados en una gran cantidad de los programas comerciales de análisis estructural. Se presenta uno de los más populares, originalmente propuesto por Newmark (1962); aunque nos limitamos a sistemas de un grado de libertad, veremos posteriormente que los conceptos expuestos se aplican al análisis paso a paso de estructuras más complejas. Considerando el sistema de la figura 2.2, cuya ecuación de movimiento es la 2.1, que escribiremos ahora como

$$ma + cv + ku = -m\ddot{u} \quad (2.7)$$

Donde a , v y u son la aceleración, velocidad y desplazamiento, respectivamente de la masa m . Supondremos que estas 3 cantidades se conocen en el instante y usaremos el subíndice 1 para denotar sus valores en $t + \Delta t$. Se debe también cumplir

$$ma_1 + cv_1 + ku_1 = -m\ddot{u}_1 \quad (2.8)$$

Definiendo $\Delta a = a_1 - a$, $\Delta v = v_1 - v$, $\Delta u = u_1 - u$; y restando las 2 últimas ecuaciones se deduce que:

$$m\Delta a + c\Delta v + k\Delta u = -m(\dot{s}'_1 - \dot{s}') \quad (2.9)$$

Newmark propuso emplear las siguientes ecuaciones para calcular v_1 y u_1 :

$$v_1 = v + 1/2(a + \beta a_1)\Delta t \quad (2.10)$$

$$u_1 = u + v\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)a + \beta a_1\right](\Delta t)^2 \quad (2.11)$$

Usando conceptos básicos de cinemática se puede deducir cómo varía la aceleración con el tiempo en el lapso Δt . Por ejemplo $\beta = 1/4$ corresponde a la aceleración constante de dicho lapso, igual al promedio de a , a_1 , mientras que una variación lineal de aceleraciones entre a y a_1 conduce a $\beta = 1/6$.

Tenemos ahora que resolver el sistema de tres ecuaciones simultáneas 2.9, 2.10 y 2.11 con tres incógnitas: a_1 , v_1 y u_1 o, de manera equivalente Δa , Δv y Δu . En lo que sigue se considera $\beta = 1/4$, aunque el procedimiento es similar para cualquier otro valor de β . La ecuación 2.11 se convierte en:

$$u_1 = u + v\Delta t + 1/4(a + a_1)(\Delta t)^2 \quad (2.12)$$

O

$$\Delta u = u_1 - u = v\Delta t + 1/4(a + a_1)(\Delta t)^2 \quad (2.13)$$

De 2.10 obtenemos:

$$\Delta v = v_1 - v = 1/2(a + a_1)(\Delta t) \quad (2.14)$$

Despejando $(a + a_1)(\Delta t)$ de esta ecuación y sustituyendo en 2.13 se llega a:

$$\Delta v = 2\left(\frac{\Delta u}{\Delta t} - v\right) \quad (2.15)$$

De 2.13 también deducimos que

$$\frac{4(\Delta u - v\Delta t)}{(\Delta t)^2} = a + a_1 = a_1 - a + 2a$$

$$\Delta a = a_1 - a = \frac{4(\Delta u - v\Delta t)}{\Delta t^2} - 2a \quad (2.16)$$

Empleando las ecuaciones 2.15 y 2.16 para substituir Δv y Δa en 2.9, Δu queda como la única incógnita que se despeja con el resultado siguiente:

$$\Delta u = \Delta s^* / k^* \quad (2.17)$$

Donde

$$k^* = k + 2\frac{c}{\Delta t} + 4m/\Delta t^2 \quad (2.18)$$

$$\Delta s^* = -m(\ddot{s}_1 - \ddot{s}) + \left[4\frac{m}{\Delta t^2} + 2c\right]v + 2ma \quad (2.19)$$

Cuando el intervalo de tiempo es constante, el método se aplica como sigue:

- a) Calcúlese k^* , que se mantienen constante (ecuación 2.18)
- b) Para cada paso:
 - b.1 calculándose Δs y Δu (ecuaciones 2.19 y 2.17)
 - b.2 determinándose Δv y Δa (ecuaciones 2.15 y 2.16)
 - b.3 calcúlense la aceleración, velocidad y desplazamiento para $t_1 = t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} a_1 &= a + \Delta a \\ v_1 &= v + \Delta v \\ u_1 &= u + \Delta u \end{aligned}$$

- c) Se prosigue al paso siguiente con $a = a_1$, $v = v_1$, $u = u_1$.

Para comenzar, se toma en cuenta que, usualmente, antes del temblor la masa está en reposo, es decir que cuando $t = 0$ tenemos que $v = u = 0$. Como 2.7 se debe de satisfacer en todo momento, en el primer paso el equilibrio dinámico requiere que $a = -\ddot{s}(0)$, con lo que se conocen los valores iniciales de las tres incógnitas.

Para ilustrar el método y apreciar su precisión consideraremos el sistema de la figura 2.2 vibrando libremente después de un desplazamiento inicial unitario, con velocidad inicial nula; supongamos también que m y k asumen valores unitarios y que el amortiguamiento es 5% del crítico. La aplicación del método de Newmark se presenta en la tabla 2.1, para los 6 primeros segundos con un intervalo de $\Delta t = 0.1$ segundos. Se presentan resultados parciales obtenidos en los pasos b.1 b.2.

En este caso por tratarse de vibraciones libres, $s = 0$ en todos los pasos, y en el paso inicial $u = 1$, $v = 0$ y de la ecuación 2.7 se deduce que $a = -u = -1.0$. Se ha incluido en la tabla citada los desplazamientos calculados con la solución analítica dada por la ecuación 2.5 y se encuentra concordancia de tres cifras significativas con los valores numéricos. Se puede lograr mayor precisión con intervalos menores de integración, aunque es normalmente suficiente usar el intervalo en el que se da el acelerograma a uno tal que $\frac{\Delta t}{T} < 0.1$, donde T es el periodo fundamental de sistema.

Muchos programas emplean el método de Newmark con $\beta = 1/4$, debido a su sencillez y precisión, a que se aplica a estructuras de múltiples grados de libertad, y a que su autor demostró que con esta elección el método es incondicionalmente estable, es decir que nos lleva a resultados considerablemente precisos como consecuencia de las aproximaciones numéricas, independiente mente del valor de Δt .

2.4. Espectro de respuesta elástico

En secciones precedentes se han presentado métodos analíticos y numéricos para calcular la respuesta de sistema de un grado de libertad, a un movimiento de la base descrito por su acelerograma $\ddot{s}(t)$. Recuérdese que las propiedades del sistema que determinan tal respuesta son el periodo (o la frecuencia) de vibración, T , y la fracción de amortiguamiento crítico ξ . Para entender de mejor manera el efecto de un acelerograma en diferentes estructuras conviene mantener fija la fracción de amortiguamiento crítico e ir calculando alguna respuesta máxima, usualmente la aceleración, para distintos valores T ; los resultados se grafican con T como abscisa y se obtiene así el espectro de respuesta del acelerograma. Es frecuente obtener primero el espectro de desplazamientos relativos $D = \max(u)$, y en lugar de velocidades y desplazamientos y dibujar las cantidades $V = \omega D$ y $A = \omega^2 D$, que se denominan espectros de seudovelocidades y pseudoaceleraciones, respectivamente. Nótese que la fuerza máxima que debe resistir el elemento elástico como consecuencia del temblor en cuestión es:

$$F = kD = \left(\frac{k}{m}\right)mD = m\omega D = mA$$

Entonces conocida la pseudoaceleración espectral, F se calcula multiplicándola por la masa m . Ya que $m = \frac{W}{g}$, donde W es el peso y g es la aceleración de la gravedad, F también es

igual a $W(A/g)$, por lo cual se acostumbra expresar la pseudoaceleración como una fracción de g . Aquí definiremos $S_a = A/g$, y así tenemos que $F = WS_a$, es decir que S_a es el cociente de la fuerza sísmica máxima entre el peso.

La figura 2.5 presenta los espectros de pseudoaceleraciones (S_a) del acelerograma registrado por la Secretaría de Comunicaciones y Transportes durante el temblor del 19 de septiembre de 1985, correspondientes a amortiguamientos del 2, 5 y 10 por ciento del crítico, se nota que a mayor amortiguamiento menor respuesta, para cualquier periodo y que para un amortiguamiento dado, existen periodos (alrededor de 2 segundos en este caso) para los que la respuesta es sensiblemente mayor que para los demás.

Una característica adicional de estos espectros es que cuando $T = 0$, S_a es igual a la aceleración máxima del terreno, es decir el valor máximo de $\ddot{s}(t)$.

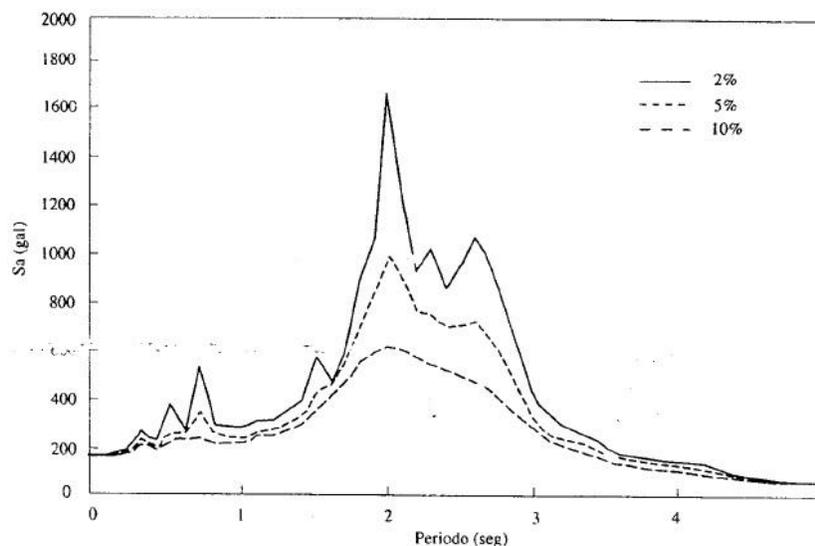


Figura 2.5 Espectros de pseudoaceleraciones del registro de la Secretaría de Comunicaciones y Transportes durante el temblor del 19 de septiembre de 1985

2.5. Sistemas lineales de varios grados de libertad sin torsión

En edificios es usualmente aceptable que las masas están concentradas en los niveles de los pisos y que las fuerzas de inercia son solo laterales; por ello lo que sigue se limita a tratar este caso, aunque varios conceptos son aplicables a otros sistemas estructurales con masas concentradas cuyos apoyos tengan todos el mismo movimiento.

2.6. Ecuaciones de equilibrio dinámico

Considerando el sistema de 3 grados de libertad mostrado en la figura 2.6, cuyos apoyos tienen un movimiento $s(t)$ y cuyas masas m_1, m_2 y m_3 tienen desplazamientos u_1, u_2 y u_3 , respectivamente. Las fuerzas de inercia en este caso son $m_1(\ddot{u}_1 + \ddot{s})$, $m_2(\ddot{u}_2 + \ddot{s})$ y $m_3(\ddot{u}_3 + \ddot{s})$. Las fuerzas de los elementos elásticos se calculan con el producto de la matriz de rigidez lateral K por los desplazamientos laterales, es decir

$$F_e = Ku$$

Donde, para el caso de la figura 2.6

$$K = \begin{matrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{31} & K_{33} \end{matrix}$$

Donde $k_{ij} = k_{ji}$

$$F_e = \begin{matrix} F_{e1} \\ F_{e2} \\ F_{e3} \end{matrix}$$

$$u = \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix}$$

De análoga manera las fuerzas de amortiguamiento viscoso se pueden expresar como la matriz de amortiguamiento por las velocidades, obteniendo

$$F_a = C\dot{u}$$

Donde el punto denota derivación con respecto al tiempo. Veremos más adelante que no es necesario calcular C y que el efecto del amortiguamiento se toma en cuenta en los espectros de diseño.

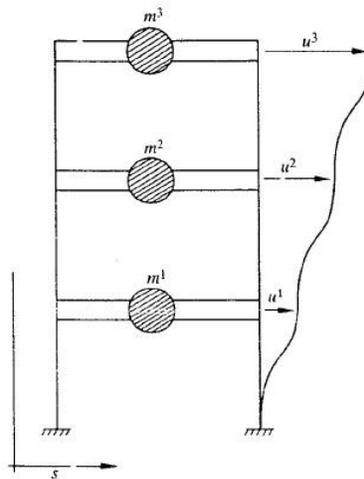


Figura 2.6 Sistema de tres grados de libertad dinámicos

Para cada masa la suma de todas las fuerzas deberá ser igual a cero. Así se llega a que las ecuaciones de equilibrio dinámico son

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = -M1\ddot{s} \quad (2.20)$$

M se denomina matriz de masas y para la estructura de la figura 2.6, es igual a:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

En la expresión 2.20 hemos definido también:

$$1\ddot{s} = \begin{bmatrix} 1 & \ddot{s} \\ 1 & \ddot{s} \\ 1 & \ddot{s} \end{bmatrix}$$

2.7. Vibraciones libres no amortiguadas

En lugar de resolver la ecuación 2.20, conviene considerar el caso más simple en el que no existen amortiguadores (sus efectos se incluyen después de manera aproximada) y no existe movimiento del terreno, con lo cual dicha ecuación se convierte en:

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad (2.21)$$

Ahora bien, toda estructura elástica puede vibrar libremente en forma tal que el desplazamiento de cada una de sus masas con respecto a su posición de equilibrio estático es igual al producto de una función de la posición de la masa considerada por una función del tiempo, que es la misma para todas las masas. En otras palabras los desplazamientos se pueden expresar de la siguiente manera:

$$u(t) = Zq(t) \quad (2.22)$$

Donde para el caso de la figura 2.6

$$u = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}; Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Se dice que una estructura de esta manera vibra en sus modos naturales; el conjunto de valores z_j (que son constantes independientes de t) se denomina forma del modo y el periodo de la función del tiempo $q(t)$, en caso de existir se llama periodo natural.

Derivando la ecuación 2.22 se obtiene $\ddot{u}(t) = Z\ddot{q}(t)$ y sustituyendo en 2.21 llegamos a:

$$MZ\ddot{q} + Kzq = 0 \quad (2.23)$$

Por sencillez se han omitido los (t) . Para la masa i el desarrollo de la última expresión da:

$$m_i z_i \ddot{q} + (\sum_j K_{ij} z_i) q = 0 \quad (2.24)$$

De donde

$$\ddot{q}/q = \sum_j K_{ij} z_i / m_i z_i$$

El primer miembro de la ecuación es función de t , mientras que el segundo no, por tanto ambos deben de ser constantes para que la igualdad subsista. Si llamamos $-\omega^2$ a este valor constante, obtenemos:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

Cuya solución es:

$$q = a \text{ sen } \omega (t - \tau) \quad (2.25)$$

De acuerdo con lo anterior existen modos de vibración que satisfacen las condiciones de la expresión 2.22. Estos son tales que el movimiento de cada masa es armónico simple con periodo natural $T = 2\pi/\omega$; ω se llama frecuencia natural circular. Derivando 2 veces la ecuación 2.25 se tiene

$$\ddot{q} = -\omega^2 a \text{ sen } \omega (t - \tau) = -\omega^2 q$$

Sustituyendo en 2.16 y considerando que $q \neq 0$, queda

$$(K - \omega^2 M)z = 0 \quad (2.26)$$

Que es un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Para que existan valores de Z distintos de cero es necesario que el determinante del sistema se anule, esto es, que

$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad (2.27)$$

2.8. Frecuencias y modos de vibración

Matemáticamente la expresión 2.27 constituye un problema de valores característicos. Desarrollando el determinante se obtiene una ecuación algebraica de grado n cuya incógnita es ω^2 , siendo n el número de grados de libertad, cuya solución conduce a n valores de ω^2 , es decir a n frecuencias naturales de vibración ω , que corresponden a otros tantos periodos naturales $2\pi/\omega$. Para estructuras estables los valores de ω^2 son reales y positivos, y sus raíces cuadradas son las frecuencias naturales. Se acostumbra numerar a las ω en orden creciente; así la primera frecuencia ω_1 (llamada frecuencia fundamental) tiene el menor valor, y la última ω_n , el mayor. Remplazando cada valor de la frecuencia ω_j en 2.26 podemos obtener vectores Z_j diferentes de cero; cada uno de ellos se llama modo de vibración. No resultan soluciones únicas para cada modo sino solamente valores relativos entre las z_{ij} es decir que no están definidas las amplitudes de las vibraciones, sino las relaciones entre todas ellas. Se demuestra que los modos de vibración tienen las siguientes propiedades:

- a) Ortogonalidad con respecto a la matriz de masas,

$$Z_j^T M Z_r = 0 \quad \text{si } j \neq r \quad (2.28)$$

- b) Ortogonalidad con respecto a la matriz de rigideces

$$Z_j^T M Z_r = 0 \quad \text{si } j \neq r \quad (2.29)$$

- c) Los modos naturales constituyen un conjunto completo, lo que significa que cualquier configuración de los desplazamientos u puede expresarse como una combinación lineal de las Z_j , es decir:

$$u = \sum_j a_j Z_j$$

Los productos de $m_j^* = Z_j^T M Z_j$ y $k_j^* = Z_j^T K Z_j$, son cantidades escalares que se dominan masa y rigidez generalizadas del modo j , respectivamente. Sus valores dependen de la escala de cada modo, aunque el cociente del segundo sobre el primero se mantiene constante y es igual al cuadrado de la frecuencia del modo en cuestión.

2.8.1. Cálculo numérico de modos y frecuencias de vibrar

El procedimiento seguido en la sección precedente para obtener modos y periodos de vibrar es laborioso e impráctico en sistemas de más grados de libertad. Por ello se han desarrollado métodos numéricos de aproximaciones sucesivas.

2.8.1.1. Método de Newmark

Este método, propuesto por su autor en 1943, está basado en el proceso de iteraciones de Stodola-Vianello (Rosenblueth y Estava, 1962). En la forma en que a continuación se describe, el método es aplicable al cálculo del modo fundamental de vibraciones de las estructuras llamadas sencilla o cercanamente acopladas. En estas estructuras la masa de los pisos intermedios está ligada solo a la de los pisos superior e inferior mediante resortes que representan las rigideces. En su forma más general el método se puede aplicar a cualquier estructura lineal con acoplamiento entre las diferentes masas (Newmark y Rosenbleuth, 1971). Los pasos en qué consiste el método se han aplicado en la tabla 2.2 a la estructura de la figura 2.7 y son los siguientes:

- a) Supóngase una forma \mathbf{X} para el modo. Esta es la que aparece en el renglón 1 de la tabla. Para comenzar, es usualmente apropiado suponer valores iguales al número de orden del piso (de abajo hacia arriba).
- b) Obténgase la fuerza de la inercia en cada masa correspondiente de la configuración supuesta. Estas fuerzas serán $\mathbf{MX}\omega^2$, como se desconoce ω^2 , se calculan los productos $\mathbf{MX} = \mathbf{F}\omega^2$, que forman la segunda región de la tabla.
- c) A partir de las fuerzas de inercia calcúlense las fuerzas cortantes en los entrepisos, también divididas entre ω^2 ; esto es, se calcula \mathbf{V}/ω^2 , como se anota en el tercer renglón de la tabla.
- d) Dividiendo las fuerzas cortantes entre las rigideces de entrepiso, obténgase las deformaciones de entrepiso también divididas entre ω^2 . Esto se presenta en el renglón cuarto de la tabla como $\Delta\mathbf{Y}/\omega^2$.
- e) Acumulando deformaciones de entrepiso determínese una nueva configuración de los desplazamientos de las masas \mathbf{Y}/ω^2 (quinto renglón de la tabla).
- f) Obténgase ω^2 para cada masa, como los cocientes $X_i/(Y_i/\omega^2)$; así se llega al sexto renglón de la tabla. Si la configuración \mathbf{X} supuesta es la correcta, resultara el mismo valor para todas las masas; en caso contrario, es necesario repetir todos los pasos empezando con una forma de modo proporcional a \mathbf{Y}/ω^2 hasta que se obtengan valores de ω^2 suficientemente parecidos en todas las masas. Así se obtiene una convergencia en general bastante rápida.

La tabla 2.2 incluye 3 iteraciones, que llevaron a una aproximación suficiente. Los valores de \mathbf{X} en cada iteración se normalizaron de manera que la masa del primer piso tuviese un desplazamiento unitario, lo cual permite apreciar cómo se va modificando de una iteración a otra la forma del modo. Para calcular la frecuencia se pueden promediar los valores del último ciclo o, mejor aún, determinarla con el cociente de Schwartz (que es la forma del cociente de Rayleigh) como sigue.

$$\omega^2 = \frac{\sum_i (F_i/\omega^2)(Y_i/\omega^2)}{\sum_i F_i(Y_i/\omega^2)^2}$$

Se emplean los valores de F_i y Y_i del último ciclo.

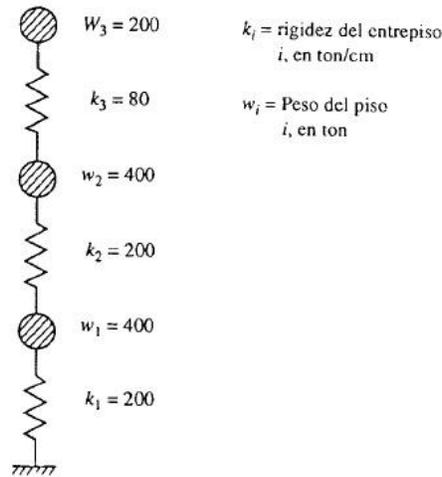


Figura 2.7. Diagrama de masas

Renglón	K (ton/cm)	200		200		200	
		M ($\frac{\text{ton} \cdot \text{seg}^2}{\text{cm}}$)	0.408	0.408	0.204		
1	X		1.00	2.000	3.000		
2	F/ω^2		0.408	0.816	0.612		
3	V/ω^2	1.836		1.428	0.612		
4	$\Delta Y/\omega^2$	0.00918		0.00714	0.00765		
5	Y/ω^2		0.00918	0.01632	0.02397		
6	ω^2		109	123	125		
1	X		1.000	1.780	2.610		
2	F/ω^2		0.408	0.726	0.532		
3	V/ω^2	1.664		1.258	0.532		
4	$\Delta Y/\omega^2$	0.00837		0.00629	0.00665		
5	Y/ω^2		0.00837	0.01466	0.2131		
6	ω^2		119	121	122		
1	X		1.000	1.750	2.550		
2	F/ω^2		0.408	0.714	0.520		
3	V/ω^2	1.642		1.234	0.520		
4	$\Delta Y/\omega^2$	0.00821		0.00617	0.0065		
5	Y/ω^2		0.00821	0.01438	0.02088		
6	ω^2		121.8	121.7	122.1		
			1.000	1.752	2.543		

Tabla 2.2 Método de Newmark

$$\omega^2 = \frac{\sum_i (F_i / \omega^2) (Y_i / \omega^2)}{\sum_i F_i (Y_i / \omega^2)^2} = \frac{0.024475}{0.000201} = 121.0 \text{ seg}^{-2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.5686 \text{ seg.}$$

2.8.1.2. Método de Holzer

Para calcular modos superiores al primero, podemos emplear el procedimiento de Holzer (Crandall y Strang, 1957). Este método es solamente aplicable a estructuras sencillamente acopladas. Los pasos a dar son:

- a) Supóngase arbitrariamente un valor de ω^2 mayor que el del modo fundamental, previamente obtenido por cualquier método.
- b) Supóngase la amplitud del movimiento X_1 de la primera masa a partir del apoyo. Conviene suponer un valor unitario. Esta amplitud supuesta es también igual al desplazamiento ΔX_1 del primer entrepiso.
- c) Calcúlese la fuerza cortante en el primer resorte, $V_1 = K_1 \Delta X_1$, donde K_1 es la rigidez de entrepiso, y la fuerza de inercia en la primera masa, $F_1 = M_1 \omega^2 X_1$.
- d) Por equilibrio determínese la fuerza cortante en el segundo resorte $F_2 = V_1 - F_1$.
- e) Obténgase la deformación de este último $\Delta X_2 = F_2 / K_2$.
- f) Calcúlese la amplitud del desplazamiento de la segunda masa, $X_2 = X_1 + \Delta X_2$, y la fuerza de inercia de la misma $F_2 = M_2 \omega^2 X_2$.
- g) Repítanse los pasos (d) a (f) con el tercer resorte y con la tercer masa.
- h) Continúese el proceso hasta llegar a la última masa. Si se satisface el equilibrio entre la fuerza de cortante del último resorte y la fuerza de inercia de la masa aludida, la frecuencia escogida y las amplitudes calculadas corresponden a un modo natural de vibración. Por lo general, tales fuerzas no son iguales y su diferencia constituye un residuo.

Representado en una gráfica los residuos contra los distintos valores de ω^2 supuestos, se obtendrá una curva cuyos ceros corresponden a las frecuencias naturales. Un cambio de signo en los residuos correspondientes a dos valores de ω^2 indica que hay una frecuencia comprendida en ese intervalo de valores y podemos interpolar, por ejemplo linealmente, para lograr una mejor aproximación a la frecuencia buscada.

Cuando se está probando un valor de X suficientemente próximo al correspondiente a un modo de vibrar (cuando el residuo es pequeño), se encuentra que una aproximación más precisa de dicha frecuencia es (Crandall y Strang, 1957).

$$\omega^2 = \frac{\sum_i V_i \Delta X_i}{\sum_i F_i X_i} \quad (2.31)$$

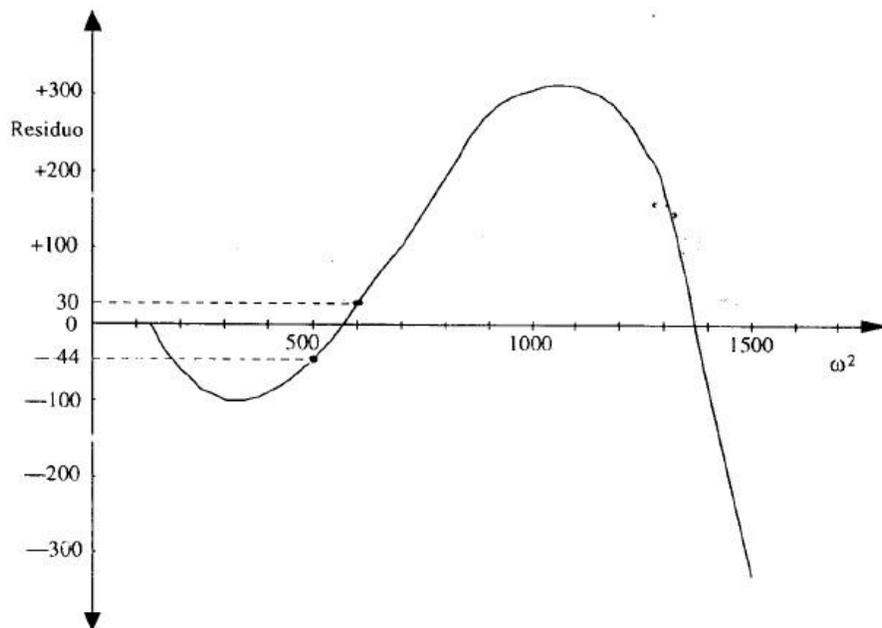


Figura 2.9 Método de Holzer

La tabla 2.3 resume los cálculos hechos para el segundo modo del edificio de la figura 2.7. Las operaciones se han hecho con mayor precisión en el último ciclo, y los resultados finales, $\omega_2^2 = 562.5/seg^2$, y de forma modal (1.000,0.85,-1.964).

La grafica de los residuos versus ω^2 se muestra en la figura 2.9, la cual incluye también puntos correspondientes a la frecuencia del tercer modo de vibrar. El valor para $\omega_3^2 = 1372/seg^2$.

Tabla 2.3 Método de Holzer

ω^2 Supuesta	K (tor/cm.)	200		200		80		Residuo
								
	M ($\frac{ton \cdot seg^2}{cm}$)		0.408		0.408		0.204	
500	X ΔX V F	1.000 200.0	1.0000 204.0	-0.020 -4.00	0.98 200.0	-2.550 -204.0	-1.570 -160	-1.1
600	X ΔX V F	1.000 200.0	1.000 245.0	-0.220 -45.00	0.780 191.0	-2.950 -236.0	-2.170 -266.0	30
560	X ΔX V F	1.000 200.0	1.000 228.5	-0.140 -28.50	-0.860 195.5	-2.810 -225	-1.950 -223	-2.0
563	X ΔX V F	1.000 200.0	1.000 229.7	-0.149 -29.70	0.851 195.5	-2.815 -225.2	-1.964 -225.6	0.4

$$(500 \times 300 + 600 \times 44) / 74 = 560 \text{ (interpolación lineal)}$$

$$\overline{\omega^2} = 560 \times \frac{200 \times 1 + 28.5 \times 0.140 + 225.0 \times 2.810}{228.5 \times 1 + 195.5 \times 0.860 + 222.0 \times 1.950} = 562.0 \quad (\text{ec. 2.31})$$

$$\overline{\omega^2} = 563 \times \frac{200 \times 1 + 29.7 \times 0.149 + 225.2 \times 2.815}{229.7 \times 1 + 195.5 \times 0.851 + 225.6 \times 1.964} = 562.5 \quad (\text{ec. 2.31})$$

2.9. Respuesta a temblores de sistemas sin torsión

Cuando una estructura elástica de varios grados de libertad como la que se muestra en la figura 2.6 está sujeta al movimiento prescrito de su base es decir a un acelerograma dado $s(t)$, sus masas sufren desplazamientos que dependen del tiempo y de la aceleración basal y pueden calcularse resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales 2.20. A partir de los

desplazamientos se pueden determinar las fuerzas actuantes en los diferentes componentes de la estructura.

2.10. Análisis modal

El llamado análisis modal aprovecha las propiedades de los modos de vibración descritos para reducir el problema de resolver un sistema acoplado de n ecuaciones diferenciales desacopladas. El concepto fundamental es que en un instante dado, los desplazamientos de las masas de sistema de varios grados de libertad pueden expresarse como la suma de los desplazamientos debidos a la participación de cada uno de los modos naturales, puesto que los mismos constituyen un conjunto completo; esto es:

$$u(t) = \sum Y_j(t) Z_j \quad (2.36)$$

O en términos completamente matriciales:

$$u(t) = ZY(t) \quad (2.37)$$

En las expresiones anteriores:

$u(t)$ = Vector de desplazamientos relativos a la base de las masas en el instante t .

$Y_j(t)$ = función escalar que expresa la variación con respecto al tiempo de la participación del modo j .

$Y(t)$ = vector columna cuyos elementos son las $Y_j(t)$.

Z_j = j – ésimo vector modal en el que el termino Z_{ij} es amplitud de desplazamiento de la masa m_i

Z = matriz modal cuya j – ésima columna es el modo Z_j

\sum Expresa suma sobre todos los modos de vibrar.

Sustituyendo $u(t)$ en la ecuación 2.20 obtenemos:

$$MZY(t) + CZ\dot{Y}(t) + KZY(t) = -M1\ddot{s}(t) \quad (2.38)$$

Recordando que gracias a las propiedades de ortogonalidad de los modos se tiene:

$$\begin{aligned} Z^T M Z &= M^* \\ Z^T K Z &= K^* \end{aligned}$$

Donde las matrices transformadas \mathbf{M}^* y \mathbf{K}^* son diagonales. Consideramos además que la matriz de amortiguamientos \mathbf{C} , se diagonaliza bajo la misma transformación modal, o sea que $\mathbf{Z}^T \mathbf{ZC} = \mathbf{C}^*$, siendo \mathbf{C}^* también diagonal. Premultiplicando ambos miembros de 2.38 por \mathbf{Z}^T nos queda:

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{K}^* \mathbf{Y}(t) = -\mathbf{Z}^T \mathbf{M} \mathbf{1} \ddot{s}(t) \quad (2.39)$$

Como los términos fuera de la diagonal de las matrices transformadas son nulos, la fila j del sistema de ecuaciones diferenciales 2.39 resulta:

$$m_j^* \ddot{Y}_j(t) + c_j^* \dot{Y}_j(t) + k_j^* Y_j(t) = -\mathbf{Z}_j^T \mathbf{M} \mathbf{1} \ddot{s}(t) \quad (2.40)$$

m_j^* , c_j^* y k_j^* Se llaman masa, amortiguamiento y rigidez generalizados en el modo j , y están dadas por:

$$\begin{aligned} m_j^* &= \mathbf{Z}_j^T \mathbf{M} \mathbf{Z} \\ c_j^* &= \mathbf{Z}_j^T \mathbf{C} \mathbf{Z} \\ k_j^* &= \mathbf{Z}_j^T \mathbf{K} \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Dividiendo 2.40 entre m_j^* y definiendo $\omega_j = \sqrt{k_j^*/m_j^*}$, $c_{crj} = 2\sqrt{k_j^* m_j^*}$ y $\xi_j = c_j^*/c_{crj}$ obtenemos:

$$\ddot{Y}_j(t) + 2\omega_j \xi_j \dot{Y}_j(t) + \omega_j^2 Y_j(t) = -[\mathbf{Z}_j^T \mathbf{M} \mathbf{1}/m_j^*] \ddot{s}(t) \quad (2.42)$$

Es de interés comparar 2.42 con la ecuación 2.2 derivada para un sistema de un grado de libertad, que repetimos a continuación:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{s}(t)$$

Como se trata de ecuaciones diferenciales lineales, de esta comparación se desprende que, para el mismo acelerograma $s(t)$, $Y_j(t)$ es igual al desplazamiento de la masa de un sistema simple de un grado de libertad con frecuencia $\omega = \omega_j$ y fracción de amortiguamiento crítico $\xi = \xi_j$ multiplicado por el siguiente factor:

$$p_j = \frac{\mathbf{Z}_j^T \mathbf{M} \mathbf{1}}{\mathbf{Z}_j^T \mathbf{M} \mathbf{Z}_{ij}^2}$$

En términos de cantidades escalares p_j se expresa en:

$$p_j = \frac{\sum_i m_i z_{ij}}{\sum_i m_i z_{ij}^2}$$

p_j se denomina coeficiente de participación del modo j y define a la escala a la que interviene este modo en el movimiento. Supongamos que el desplazamiento del sistema de un grado de libertad con frecuencia ω_j y fracción de amortiguamiento crítico ξ_j ante la excitación $s(t)$ es $\phi_j(t)$, entonces $Y_j(t) = p_j \phi_j(t)$. Sustituyendo en la ecuación 2.36 y limitándonos al desplazamiento de la n -ésima masa, inferimos:

$$u_{nj}(t) = Y_j(t)z_{ij} \quad (2.45)$$

$$u_{nj}(t) = \sum u_{nj}(t) = \sum Y_j(t) z_{nj} = \sum p_j \phi_j(t) z_{nj} \quad (2.46)$$

o también:

$$u_{nj}(t) = \sum_j \phi_j(t) z_{nj} \frac{\sum_i m_i z_{ij}}{\sum_i m_i z_{ij}^2} \quad (2.47)$$

Esta última igualdad muestra que, en el instante t , el desplazamiento relativo de la masa n debido a la contribución del modo j se obtiene como el producto de la amplitud de dicha masa en el modo aludido a una escala arbitraria, por el coeficiente de participación p_j , y por una función del tiempo $\phi_j(t)$, que es la misma que proporciona el desplazamiento relativo de la masa de un sistema de un grado de libertad de igual periodo y amortiguamiento que los del modo en cuestión. La función $\phi_j(t)$ puede calcularse con cualquier método analítico o numérico y tiene unidades de longitud.

2.11. Modos ortonormales

El que los modos puedan tener una escala arbitraria significa que podemos multiplicar todos los elementos de cualquier vector modal \mathbf{Z}_j por una constante sin afectar ninguna otra de las propiedades modales. En particular, en la ecuación 2.47 el valor de $u_n(t)$ es independiente de la escala que se adopte para los z_{ij} puesto que si los mismos se multiplican por un factor arbitrario a , aparecerá a^2 en él un numerador y en el denominador, sin alterar el resultado final.

Es muy conveniente, sin embargo, escalar los modos de manera que todas las masas generalizadas m_j^* sean iguales a la unidad. Se dice entonces que los modos se han normalizado con respecto a la matriz de masas o que son ortonormales. Supongamos que conocemos el modo \mathbf{Z}_j en una escala cualquiera que lleva en general a $m_j^* = \mathbf{Z}_j^T \mathbf{M} \mathbf{Z}_j \neq 1$.

Para obtener el modo ortonormal debemos dividir \mathbf{Z}_j por $\sqrt{m_j^*}$; hecha tal operación, de 2.41 deducimos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_j^T \mathbf{M} \mathbf{Z}_j &= \mathbf{1} \\ \mathbf{Z}_j^T \mathbf{C} \mathbf{Z}_j &= 2\omega_2 \xi_j \\ \mathbf{Z}_j^T \mathbf{K} \mathbf{Z}_j &= \omega_j^2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Las fórmulas para el factor de participación se simplifican a:

$$p_j = \mathbf{Z}_j^T \mathbf{M} \mathbf{1} = \sum m_j z_{ij} \quad (2.49)$$

La fuerza de inercia de la masa n vibrando en el modo j es el producto de la masa por la aceleración correspondiente, es decir $m_n u_{nj}$, donde, según 2.45 a 2.47,

$$\ddot{u}_{nj}(t) = \ddot{Y}_j z_{nj} = p_j \phi_j(t) z_{nj} \quad (2.50)$$

La cortante en la base V_j , en este método es la suma de las fuerzas en todas las masas:

$$V_j = \sum_n m_n p_j \phi_j(t) z_{nj} = p_j \phi_j(t) \sum_n m_n z_{nj}$$

Puesto que la última suma es igual al factor de participación del j –ésimo modo, se llega a:

$$V_j = p_j^2 \phi_j(t)$$

Teniendo presente que $\phi_j(t)$ tiene unidades de aceleración inferimos que p_j^2 tiene unidades de masa; por ello se llama masa efectiva del modo j . La adición de las masas efectivas es igual a la suma de las masas del sistema; entonces el cuadrado del coeficiente de participación del modo ortonormal j representa la parte de la masa total que genera cortante en la base de dicho modo.

3. Fuentes de la programación

3.1. Programa principal

El siguiente código puede ser incorporado a cualquier versión de MATLAB y operara siempre y cuando este en la misma carpeta de trabajo el archivo Dinprop.txt y ace1.txt.

Las líneas que inician con % son comentarios, y el compilador no los tomará en cuenta.

% Programa de SMGDL

clear, clc

% fprintf ' Están los datos del acelerograma en "ace1.txt" \n'

% fprintf ' y las propiedades de la Estructura en Dinprop.txt? s o n? \n'

```
% ace = input(' ','s')
% if ace == 's' || 'S'
% tic
```

% Las líneas están comentadas ya que en la programación final, no intervienen, y las respuestas esperadas se obvian en la interfaz.

```
%% ACELEROGRAMA
```

```
load ace1.txt
Xs = ace1(:,1);
Npts = length(Xs);
```

```
%% PROPIEDADES DINÁMICAS DE LA ESTRUCTURA
```

```
load Dinprop.txt
Tdelta = Dinprop(1,4); % Intervalo de Tiempo
Tini = Dinprop(1,5); % Tiempo Inicial
Te = Dinprop(1,6); % Periodo Natural de Vibración
Me = diag(Dinprop(:,1)); % Matriz de Masas
K = Dinprop(:,2); % Rigideces de la Estructura
Am = diag(Dinprop(:,3)); % Relación de Amortiguamiento
```

```
NGDL = length(Me);
t = (Tini:Npts-1)*Tdelta;
```

```
for i=1:NGDL-1
Ke(i,i) = K(i) + K(i+1);
Ke(i,i+1)=-K(i+1);
Ke(i+1,i)=-K(i+1);
end
Ke(NGDL,NGDL) = K(NGDL);
```

```
[Mv,Wo2] = eig(Ke,Me); % Frecuencias y Modos de Vibrar
Wo = sqrt(Wo2)
Md=Mv
```

```
% Modos de Vibrar
```

```
PU = 1;
for i=1:NGDL
for j=1:NGDL
Mdv(j,i) = Mv(j,i)/Mv(PU,i);
end
```

```

end
Mdv

figure('Position',[75 250 500 350])

subplot(151)
Nivel = 0:1:NGDL;
plot([0;Mdv(:,1)],Nivel,'bp-','LineWidth',1.5)
title('Modo 1')
grid, ylabel('Nivel')
subplot(152)
plot([0;Mdv(:,2)],Nivel,'gp-','LineWidth',1.5)
title('Modo 2')
grid, ylabel('Nivel')
subplot(153)
plot([0;Mdv(:,3)],Nivel,'rp-','LineWidth',1.5)
title('Modo 3')
grid, ylabel('Nivel')
subplot(154)
plot([0;Mdv(:,4)],Nivel,'rp-','LineWidth',1.5)
title('Modo 4')
grid, ylabel('Nivel')
subplot(155)
plot([0;Mdv(:,5)],Nivel,'rp-','LineWidth',1.5)
title('Modo 5')
grid, ylabel('Nivel')

% figure('Position',[800 160 500 450])

Mdt = Md';

for i=1:NGDL
    Te(i,i) = 2*pi / Wo(i,i);
end
Te

%% Matrices Generalizadas

Mg = Mdt*Me*Md
Kg = Mdt*Ke*Md

Wcomp = sqrt(Kg/Mg)

%% Amortiguamiento (Método de RAYLEIGHT)

```

$$a0 = 2 * Am(1,1) * Wo(1,1) * Wo(3,3) / (Wo(1,1) + Wo(3,3))$$

$$a1 = 2 * Am(3,3) / (Wo(1,1) + Wo(3,3))$$

$$Am1 = (a0 / (2 * Wo(1,1))) + (a1 * Wo(1,1) / 2)$$

$$Am3 = (a0 / (2 * Wo(3,3))) + (a1 * Wo(3,3) / 2)$$

$$Cam = a0 * Me + a1 * Ke$$

$$Cg = Mdt * Cam * Md$$

for j=1:NGDL

$$Am(j,j) = (Cg(j,j) / (2 * Wo(j,j) * Mg(j,j)));$$

end

%% Factor de Participación Modal

$$Fpm = \text{sum}(Me * Md) / \text{sum}(Me * (Md.^2))$$

%% APLICANDO FFT

$$Wdelta = 1 / (Npts * Tdelta); \quad \% \text{ Incremento de Frecuencia}$$

$$f = (0:Wdelta:(Npts-1)*Wdelta);$$

$$Ww = 2 * pi * f; \quad \% \text{ OMEGA}$$

$$\text{img} = \text{sqrt}(-1);$$

for j=1:NGDL

$$Ft = -Fpm(j) * Xs; \quad \% \text{ Fuerza en el dominio del Tiempo}$$

$$Fw = \text{fft}(Ft); \quad \% \text{ Fuerza en el Dominio de la Frecuencia}$$

$$r = Ww ./ Wo(j,j); \quad \% \text{ Relación de Frecuencias}$$

% Función de Transferencia

$$Hh = 1 ./ (Kg(j,j) * ((1 - (r.^2)) + (2 * \text{img} * Am(j,j) * r)));$$

$$Zw(1) = Fw(1);$$

for k = 2:Npts/2+1

$$Zw(k) = Hh(k) * Fw(k);$$

$$nk = Npts - k + 2;$$

$$Zw(nk) = \text{conj}(Zw(k));$$

end

$$\text{nyw} = \text{abs}(Zw); \quad \% \text{ Respuesta } Z(W)\text{-Frecuencia}$$

```

Zt(1:Npts)=real(iff(Zw(1:Npts),Npts)); % Respuesta Z(t)-Tiempo

Zvt(j,:) = Zt';

end

Yt = Md*Zvt;

for j=1:NGDL
Ytmax(j,1) = max(abs(Yt(j,:)));
end

Ytmax

%% GRÁFICAS

fxw =(-Npts/2:Npts/2-1)*Wdelta;

% Graficando la aceleración sísmica (t - Xs)
% plot(t,Xs)
% title('Aceleración Sísmica Xs(t)')
% grid, xlabel('Tiempo (seg)'), ylabel('Xs(t) (gal)')
% figure

% Respuesta en el Dominio del tiempo
% plot(t,Yt)
% title('Respuesta en el Dominio del Tiempo')
% grid, xlabel('Tiempo (seg)'), ylabel('Y(t) (cm)')

%toc

% else
% fprintf ' DEBES DE TENER LOS DATOS EN ESTE ARCHIVO, EXIT!!! \n'
% end;

```

3.2.Desarrollo de la interfaz

La interfaz base para el sistema, fue creada mediante el framework de diseño visual que se incorpora en MATLAB, por ello las ligas, referencias de botones u objetos, llamadas a funciones y otras operaciones, se encuentran en inglés ya que por default vincula lo creado

en la ventana de diseño visual a un código con terminación *.m mismo que se muestra a continuación.

El nombre del archivo de la interfaz es “*PRUEBAS.m*” y la descripción de las llamadas a función y los regresos de parámetros en las mismas se comenta en cada etapa.

%% Descripción inicial de la interfaz.

```
function varargout = pruebas(varargin)
% PRUEBAS M-file for pruebas.fig
% PRUEBAS, by itself, creates a new PRUEBAS or raises the existing
% singleton*.
%
% H = PRUEBAS returns the handle to a new PRUEBAS or the handle to
% the existing singleton*.
%
% PRUEBAS('CALLBACK',hObject,eventData,handles,...) calls the local
% function named CALLBACK in PRUEBAS.M with the given input arguments.
%
% PRUEBAS('Property','Value',...) creates a new PRUEBAS or raises the
% existing singleton*. Starting from the left, property value pairs are
% applied to the GUI before pruebas_OpeningFcn gets called. An
% unrecognized property name or invalid value makes property application
% stop. All inputs are passed to pruebas_OpeningFcn via varargin.
%
% *See GUI Options on GUIDE's Tools menu. Choose "GUI allows only one
% instance to run (singleton)".
%
% See also: GUIDE, GUIDATA, GUIHANDLES

% Edit the above text to modify the response to help pruebas

% Last Modified by GUIDE v2.5 06-Mar-2011 14:43:07

% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',    mfilename, ...
                  'gui_Singleton', gui_Singleton, ...
                  'gui_OpeningFcn', @pruebas_OpeningFcn, ...
                  'gui_OutputFcn', @pruebas_OutputFcn, ...
                  'gui_LayoutFcn', [] , ...
                  'gui_Callback', []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
```

end

if nargin

[varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});

else

gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});

end

% End initialization code - DO NOT EDIT

%% Etapa de creación de entorno o fondo de la interfaz, se configure aquí el orden y aparición de las ventanas.

% --- Executes just before pruebas is made visible.

function pruebas_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)

% This function has no output args, see OutputFcn.

% hObject handle to figure

% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB

% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% varargin command line arguments to pruebas (see VARARGIN)

% Choose default command line output for pruebas

handles.output = hObject;

% Update handles structure

guidata(hObject, handles);

% UIWAIT makes pruebas wait for user response (see UIRESUME)

% uiwait(handles.figure2);

% --- Outputs from this function are returned to the command line.

function varargout = pruebas_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)

% varargout cell array for returning output args (see VARARGOUT);

% hObject handle to figure

% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB

% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Get default command line output from handles structure

varargout{1} = handles.output;

% --- Executes on button press in pushbutton1.

function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)

% hObject handle to pushbutton1 (see GCBO)

```

% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
display Adios
close(handles.figure2);

%% Termina la etapa de operaciones del entorno general. Los botones y pestañas se
configuran a partir de las siguientes líneas.

function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit1 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit1 as a double

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Acciones que se ejecutarán al oprimir el botón 2
% La descripción de los objetos, y demás parámetros se especifican en cada función que se
crea, pero para efectos de resumir, se dejará a la vista solo la primera y los restantes se
omitirán

function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to pushbutton2 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
%
% a = inputdlg({Nombre},'dame el dato')
%
% nombre = a{1}

```

```

% set(handles.text1,'nombre')

% --- Executes on button press in pushbutton2.
function pushbutton3_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to pushbutton3 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% -----
function analizar_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to analizar (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% -----Función para abrir el archive de los datos de entrada
function Untitled_1_Callback(hObject, eventdata, handles)
winopen ('Dinprop.txt')
% -----Controla las formas de las pestañas en cascada.
function Untitled_2_Callback(hObject, eventdata, handles)

% -----
function Untitled_5_Callback(hObject, eventdata, handles)

% -----Lanza la aplicación del análisis, y su revisión por etapas.
function Untitled_4_Callback(hObject, eventdata, handles)
Principal_SMGDL_SEJE
Principal_SMGDL

%% -----Controla las formas de las pestañas en cascada.

function Untitled_6_Callback(hObject, eventdata, handles)
% -----
function Untitled_7_Callback(hObject, eventdata, handles)

% ----Cada función hace una llamada al cálculo de la respuesta por entrepiso de aquí su
nombre : SMGDL_R. (Sistema de multiples grados de libertad –Respuesta)
function Untitled_14_Callback(hObject, eventdata, handles)
Principal_SMGDL_R1
function Untitled_15_Callback(hObject, eventdata, handles)
Principal_SMGDL_R2
function Untitled_16_Callback(hObject, eventdata, handles)
Principal_SMGDL_R3
function Untitled_17_Callback(hObject, eventdata, handles)

```

Principal_SMGDL_R4

`function` Untitled_18_Callback(hObject, eventdata, handles)

Principal_SMGDL_R5

% ----Cada función hace una llamada al cálculo del modo de vibrar, de aquí su nombre :
SMGDL_M. (Sistema de múltiples grados de libertad –Modos)

`function` Untitled_8_Callback(hObject, eventdata, handles)

Principal_SMGDL_M1

`function` Untitled_10_Callback(hObject, eventdata, handles)

Principal_SMGDL_M2

`function` Untitled_11_Callback(hObject, eventdata, handles)

Principal_SMGDL_M3

`function` Untitled_12_Callback(hObject, eventdata, handles)

Principal_SMGDL_M4

`function` Untitled_13_Callback(hObject, eventdata, handles)

Principal_SMGDL_M5

`function` Untitled_19_Callback(hObject, eventdata, handles)

%% -----Controla las formas de las pestañas en cascada.

`function` Untitled_20_Callback(hObject, eventdata, handles)

`function` Untitled_21_Callback(hObject, eventdata, handles)

`function` Untitled_22_Callback(hObject, eventdata, handles)

% -----Hace llamada a la función que grafica el acelerograma del sismo.

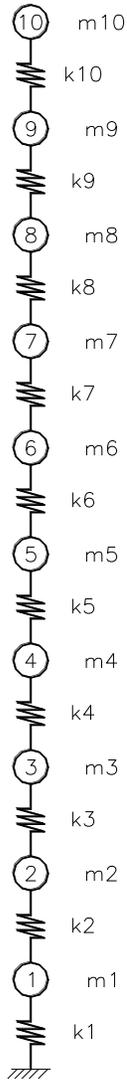
`function` Untitled_23_Callback(hObject, eventdata, handles)

Grafica_sismo

4. Comparación y resultados

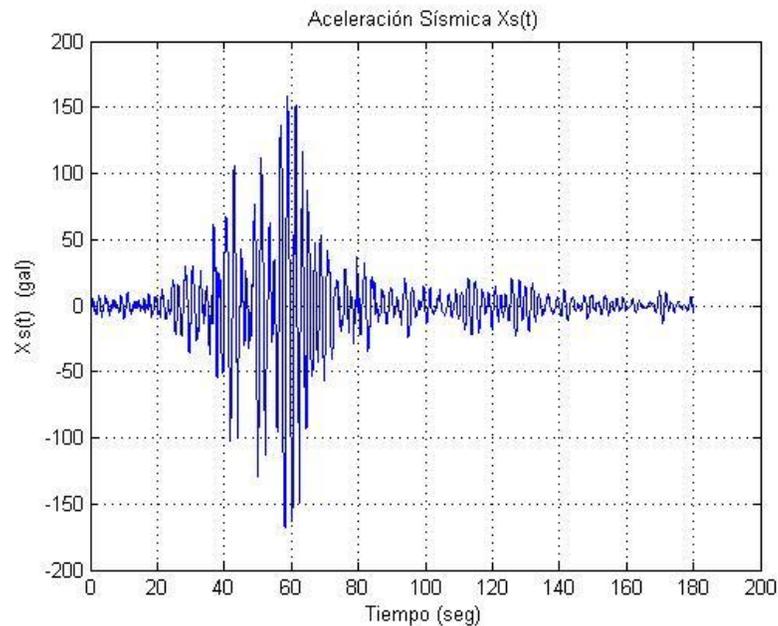
4.1. SMGDL vs programa comercial (sap2000 v.14)

Se realizó la comparación de los resultados que arroja el SMGDL al analizar una estructura con 10 Grados de Libertad, ordenados de la siguiente manera:

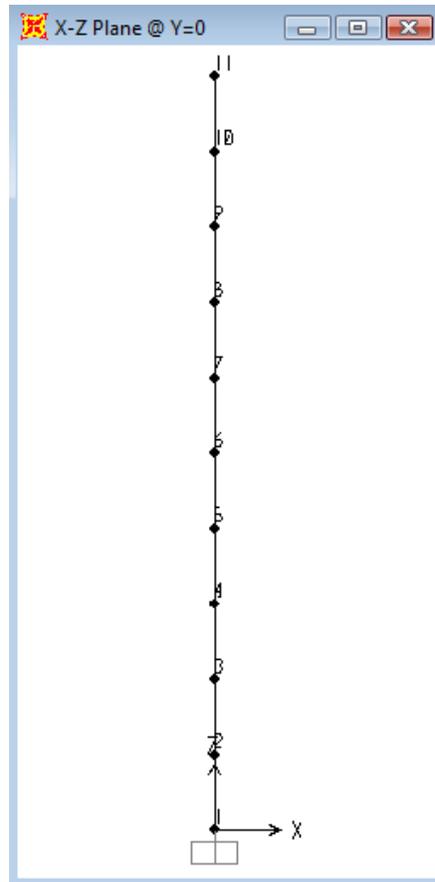


W = Peso
 m = Masa
 $m = W / g$
 g = Gravedad 981 cm/seg²
 k = Rigidez

NIVEL	PESO (Ton)	MASA (Ton-seg ² /cm)	RIGIDEZ (Ton/cm)
10	100	0.1019	80
9	100	0.1019	80
8	150	0.1529	100
7	150	0.1529	100
6	200	0.2039	120
5	200	0.2039	120
4	250	0.2548	150
3	250	0.2548	150
2	300	0.3058	200
1	300	0.3058	200



4.2. Topología en sap2000 v.14



Frecuencias y periodos

Resultado (SAP2000)

TABLE: Modal Periods And Frequencies

OutputCase	StepType	StepNum	Period	Frequency	CircFreq
Text	Text	Unitless	Sec	Cyc/sec	rad/sec
MODAL	Mode	1	1.351086	0.74015	4.6505
MODAL	Mode	2	0.547706	1.8258	11.472
MODAL	Mode	3	0.344665	2.9014	18.23
MODAL	Mode	4	0.255234	3.918	24.617
MODAL	Mode	5	0.208841	4.7883	30.086
MODAL	Mode	6	0.16916	5.9116	37.143
MODAL	Mode	7	0.151052	6.6203	41.596
MODAL	Mode	8	0.139723	7.157	44.969
MODAL	Mode	9	0.134134	7.4552	46.842
MODAL	Mode	10	0.126602	7.8987	49.629

Programa-MATLAB SMGDL

Wo = FRECUENCIA

4.6505	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	11.4718	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	18.2299	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	24.6174	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	30.0861	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	37.1435	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	41.5964	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	44.9691	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	46.8425	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	49.6294

Te = PERIODO

1.3511	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.5477	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.3447	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.2552	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.2088	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.1692	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.1511	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.1397	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.1341	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1266

Modos de vibrar
SAP2000

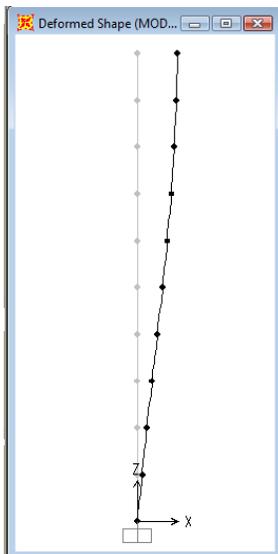
MODO 1	MODO 2	MODO 3	MODO 4	MODO 5	MODO 6	MODO 7	MODO 8	MODO 9	MODO 10
0.0043	0.0111	-0.0171	0.0215	0.0199	0.0241	0.0241	-0.0210	-0.0194	0.0007
0.0084	0.0200	-0.0255	0.0231	0.0122	-0.0026	-0.0156	0.0230	0.0263	-0.0012
0.0135	0.0265	-0.0194	-0.0033	-0.0205	-0.0308	-0.0136	-0.0131	-0.0304	0.0024
0.0181	0.0270	-0.0024	-0.0263	-0.0217	0.0132	0.0283	-0.0042	0.0262	-0.0039
0.0231	0.0202	0.0206	-0.0212	0.0185	0.0295	-0.0233	0.0250	-0.0251	0.0088
0.0272	0.0088	0.0319	0.0058	0.0303	-0.0234	-0.0064	-0.0316	0.0172	-0.0153
0.0309	-0.0072	0.0239	0.0310	-0.0115	-0.0211	0.0365	0.0309	-0.0090	0.0326
0.0336	-0.0218	0.0037	0.0275	-0.0374	0.0257	-0.0172	-0.0021	-0.0050	-0.0423
0.0356	-0.0345	-0.0238	-0.0087	-0.0051	0.0164	-0.0274	-0.0352	0.0210	0.0631
0.0366	-0.0414	-0.0413	-0.0382	0.0331	-0.0217	0.0228	0.0224	-0.0117	-0.0295

Normalizando en el Nivel 1

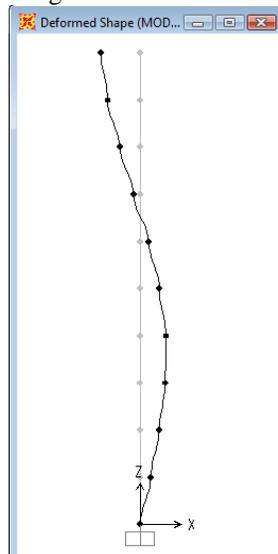
MODO 1	MODO 2	MODO 3	MODO 4	MODO 5	MODO 6	MODO 7	MODO 8	MODO 9	MODO 10
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.9669	1.7988	1.4918	1.0734	0.6160	-0.1095	-0.6456	-1.0919	-1.3550	-1.7666
3.1696	2.3813	1.1370	-0.1549	-1.0327	-1.2809	-0.5625	0.6205	1.5662	3.4135
4.2555	2.4314	0.1402	-1.2237	-1.0936	0.5495	1.1738	0.2015	-1.3503	-5.6888
5.4178	1.8146	-1.2047	-0.9851	0.9322	1.2277	-0.9683	-1.1874	1.2952	12.6873
6.3807	0.7920	-1.8693	0.2679	1.5242	-0.9722	-0.2636	1.5038	-0.8882	-22.0331
7.2550	-0.6475	-1.4002	1.4405	-0.5786	-0.8773	1.5120	-1.4673	0.4656	46.9597
7.8896	-1.9568	-0.2196	1.2783	-1.8806	1.0682	-0.7125	0.0985	0.2573	-60.8991
8.3565	-3.1013	1.3956	-0.4050	-0.2547	0.6834	-1.1369	1.6751	-1.0822	90.9640
8.5932	-3.7258	2.4200	-1.7757	1.6649	-0.9023	0.9443	-1.0630	0.6029	-42.5591

Graficando los 3 primeros modos:

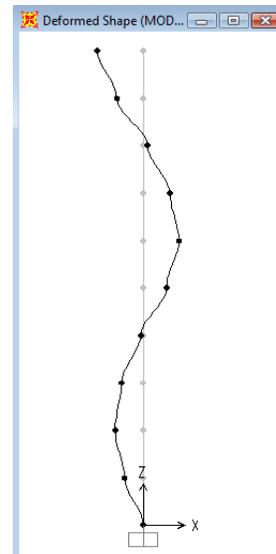
Primer Modo



Segundo Modo



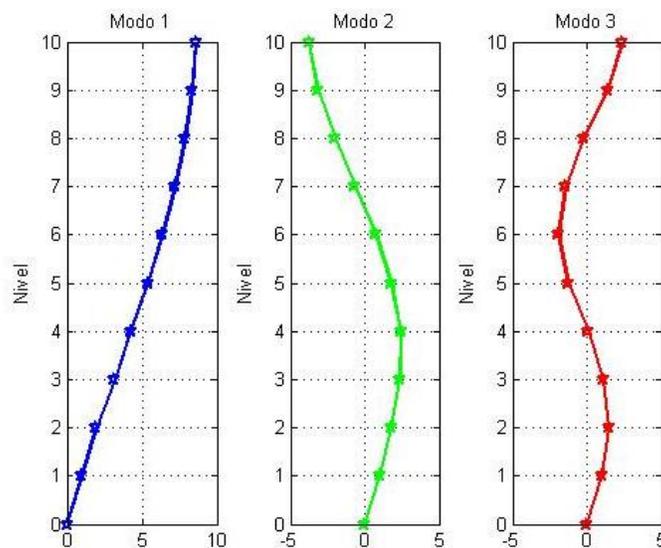
Tercer Modo



Programa-MATLAB SMGDL

Mdv = MODOS DE VIBRAR

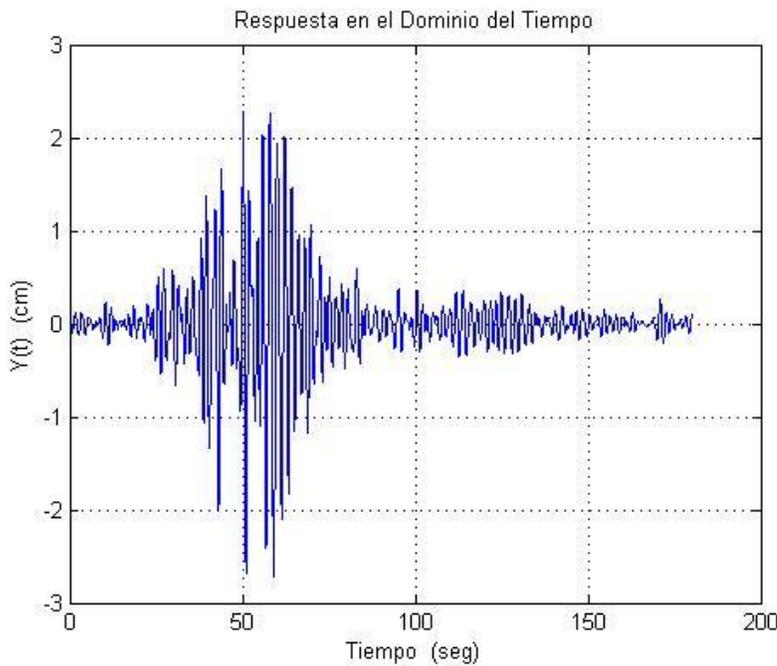
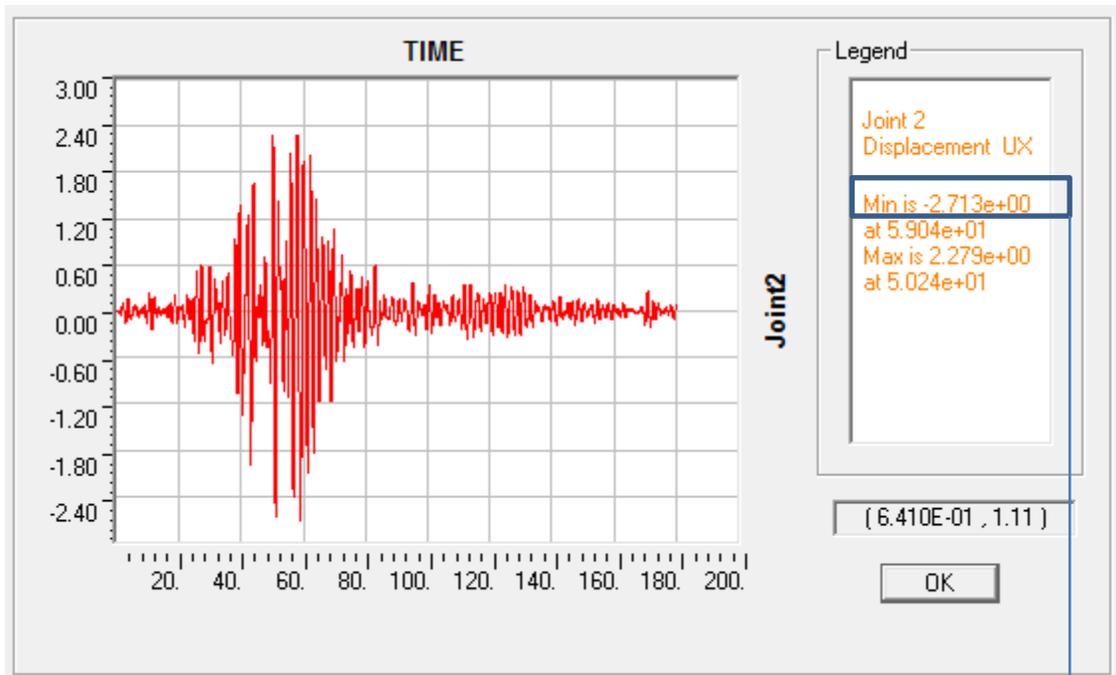
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.9669	1.7988	1.4919	1.0734	0.6160	-0.1095	-0.6456	-1.0920	-1.3550	-1.7661
3.1695	2.3812	1.1369	-0.1549	-1.0327	-1.2809	-0.5625	0.6205	1.5662	3.4139
4.2555	2.4313	0.1402	-1.2237	-1.0935	0.5495	1.1738	0.2015	-1.3503	-5.6898
5.4177	1.8146	-1.2047	-0.9851	0.9322	1.2277	-0.9683	-1.1874	1.2952	12.6880
6.3808	0.7920	-1.8693	0.2679	1.5242	-0.9721	-0.2636	1.5038	-0.8883	-22.0358
7.2552	-0.6475	-1.4001	1.4405	-0.5786	-0.8773	1.5120	-1.4673	0.4657	46.9643
7.8896	-1.9568	-0.2196	1.2783	-1.8806	1.0682	-0.7125	0.0985	0.2573	-60.9057
8.3565	-3.1012	1.3956	-0.4050	-0.2547	0.6834	-1.1369	1.6751	-1.0822	90.9744
8.5932	-3.7257	2.4200	-1.7757	1.6649	-0.9023	0.9444	-1.0630	0.6029	-42.5641



Desplazamientos

Se mostrará la gráfica obtenida en SAP2000 y posteriormente la obtenida por el programa realizado en MATLAB.

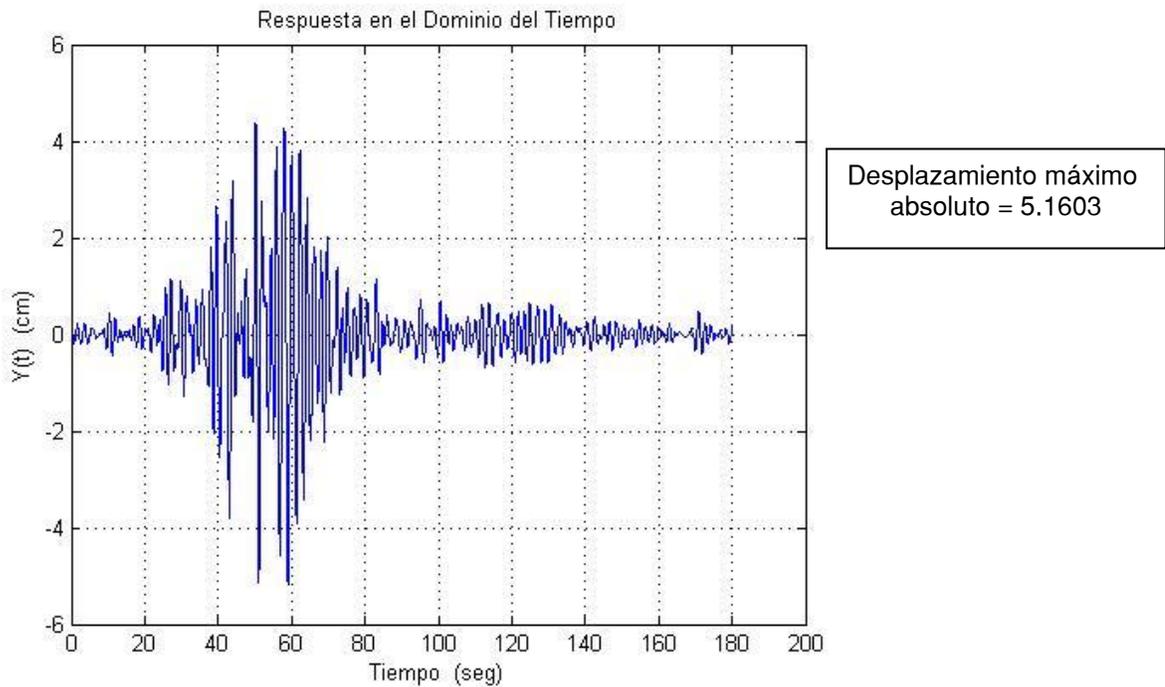
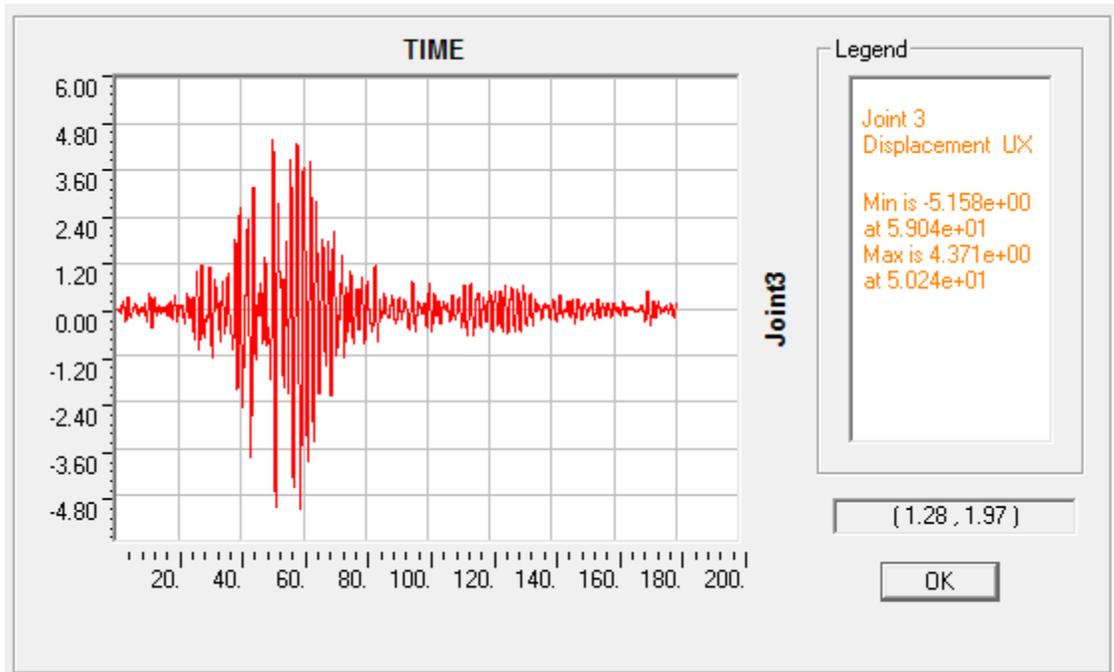
NIVEL 1



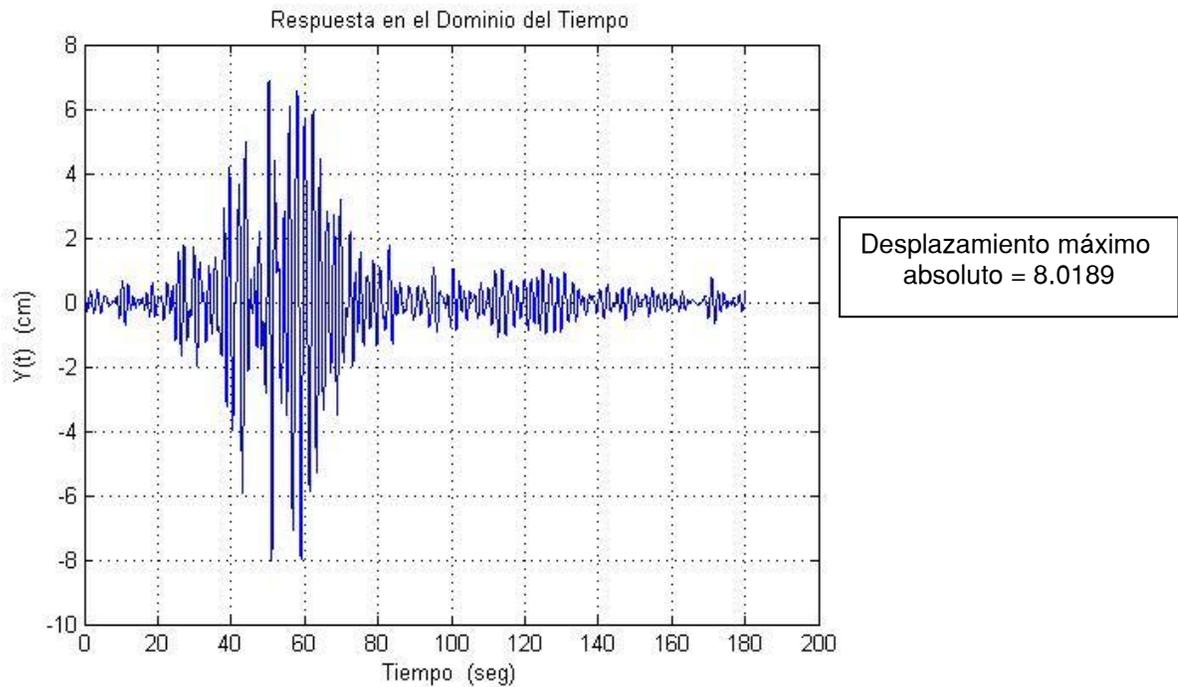
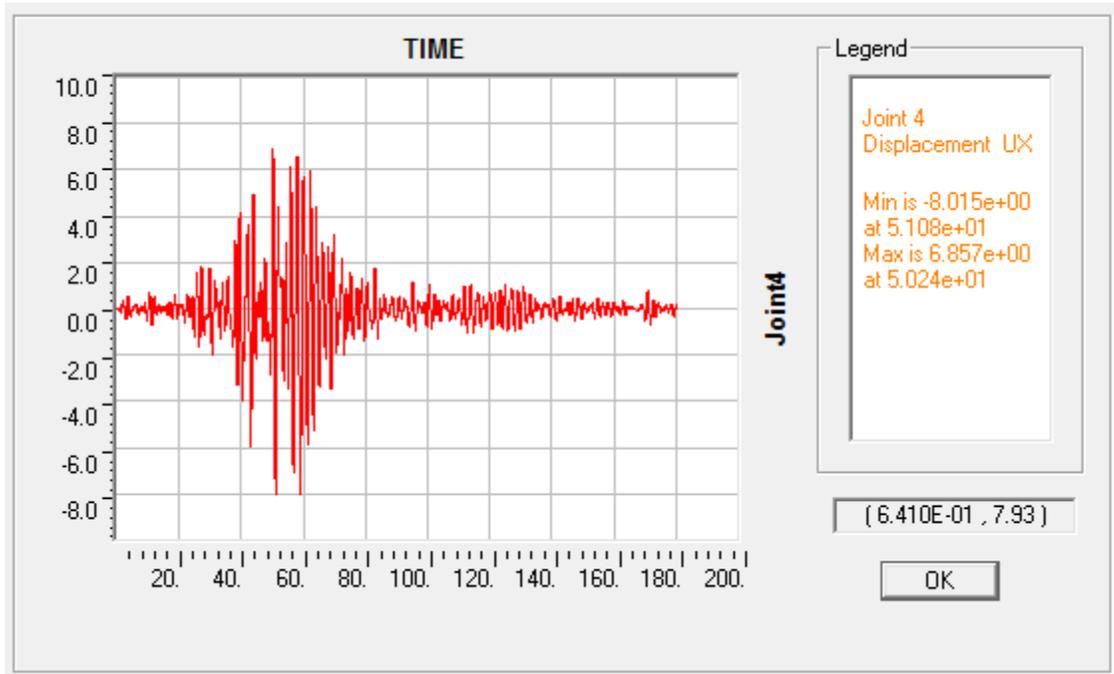
Desplazamiento máximo absoluto = 2.7137

Se nota que los desplazamientos son prácticamente iguales, y existe una diferencia no mayor a 0.001 cm. en este desplazamiento que corresponde al primer modo de vibrar, o principal en el primer nivel.

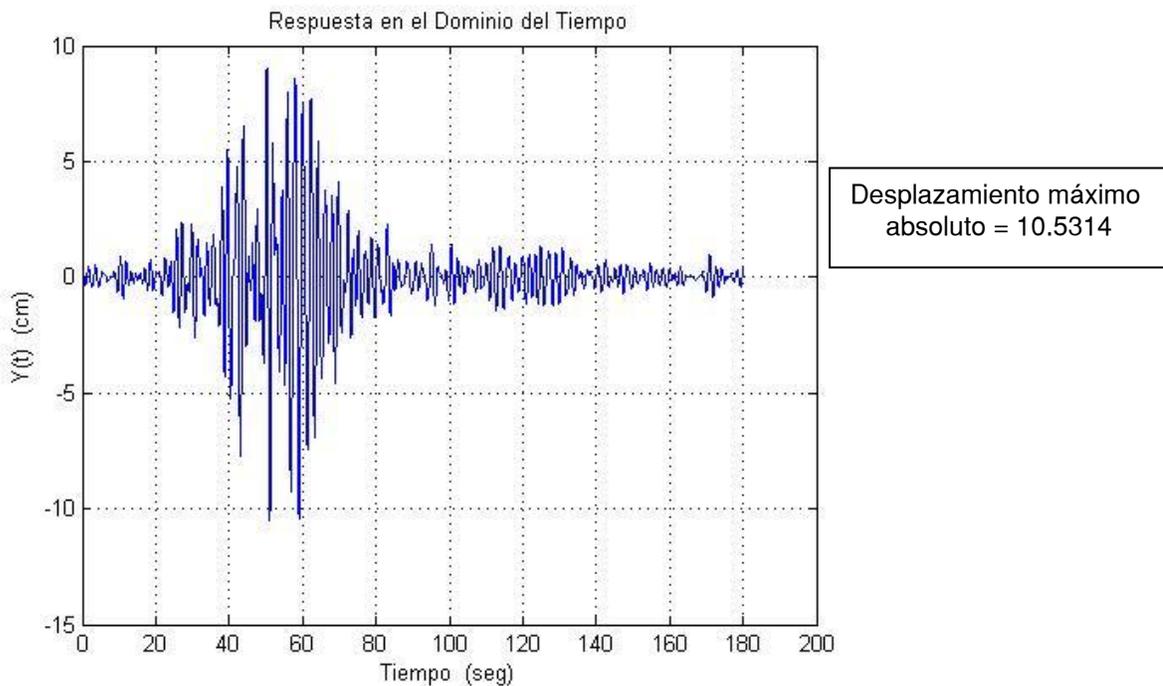
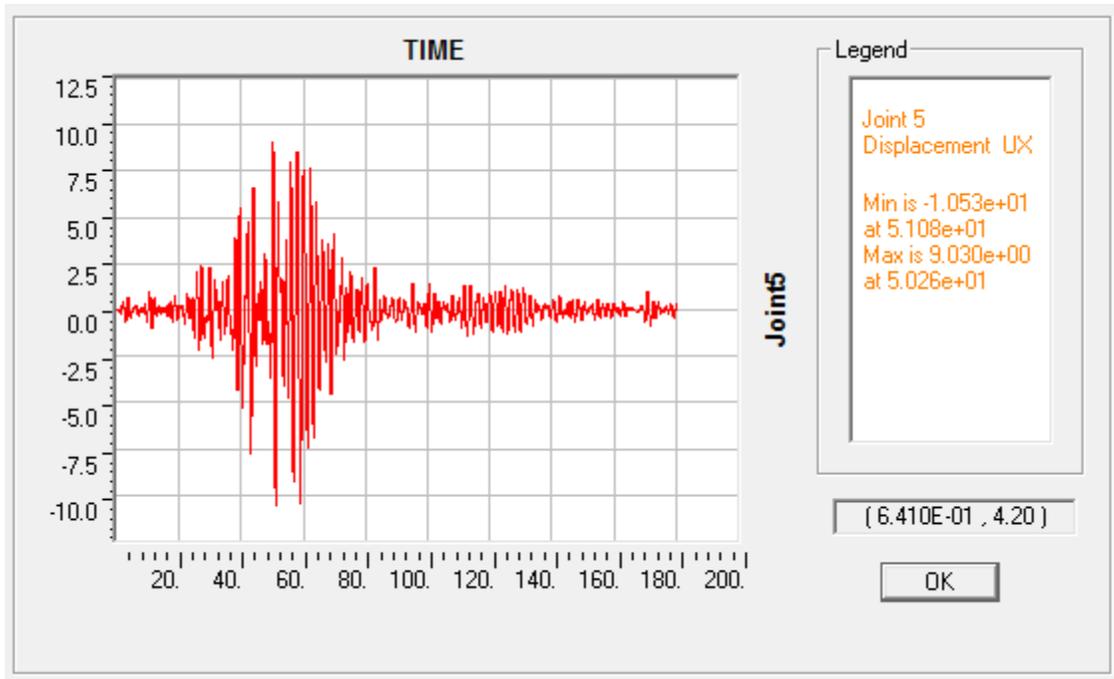
NIVEL 2



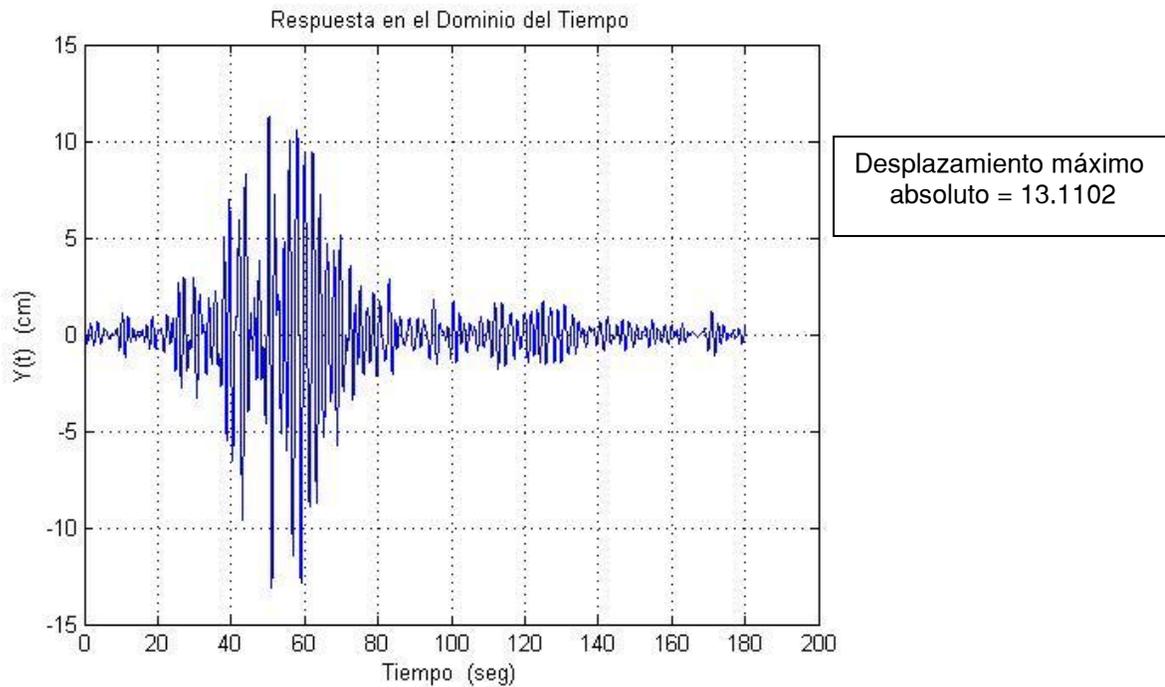
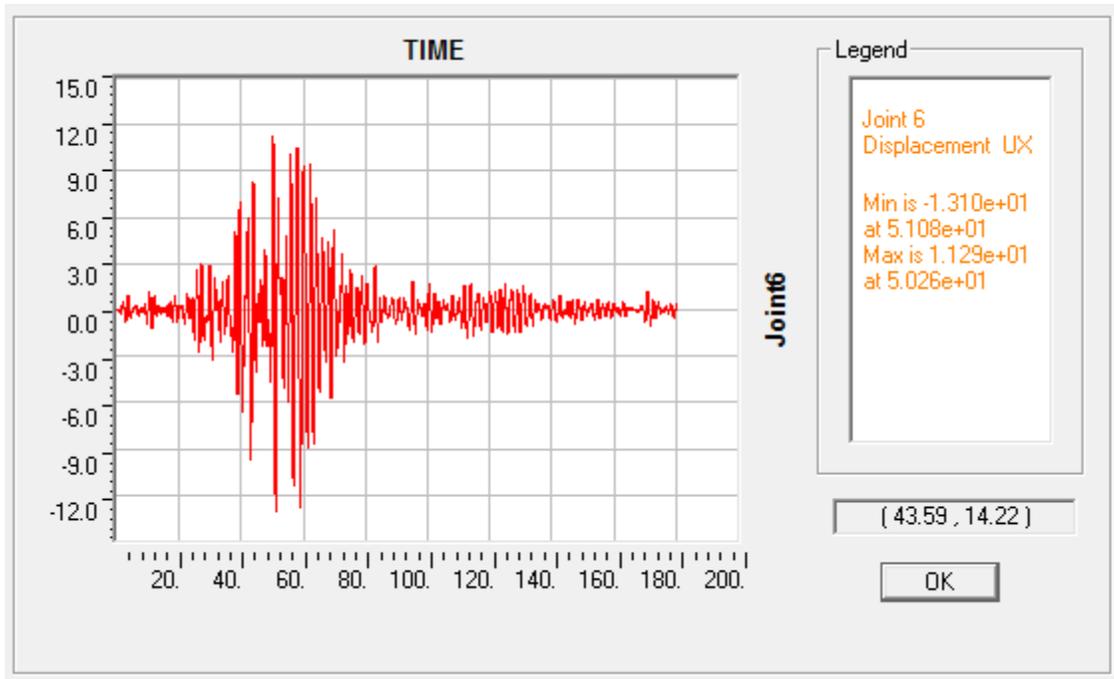
NIVEL 3



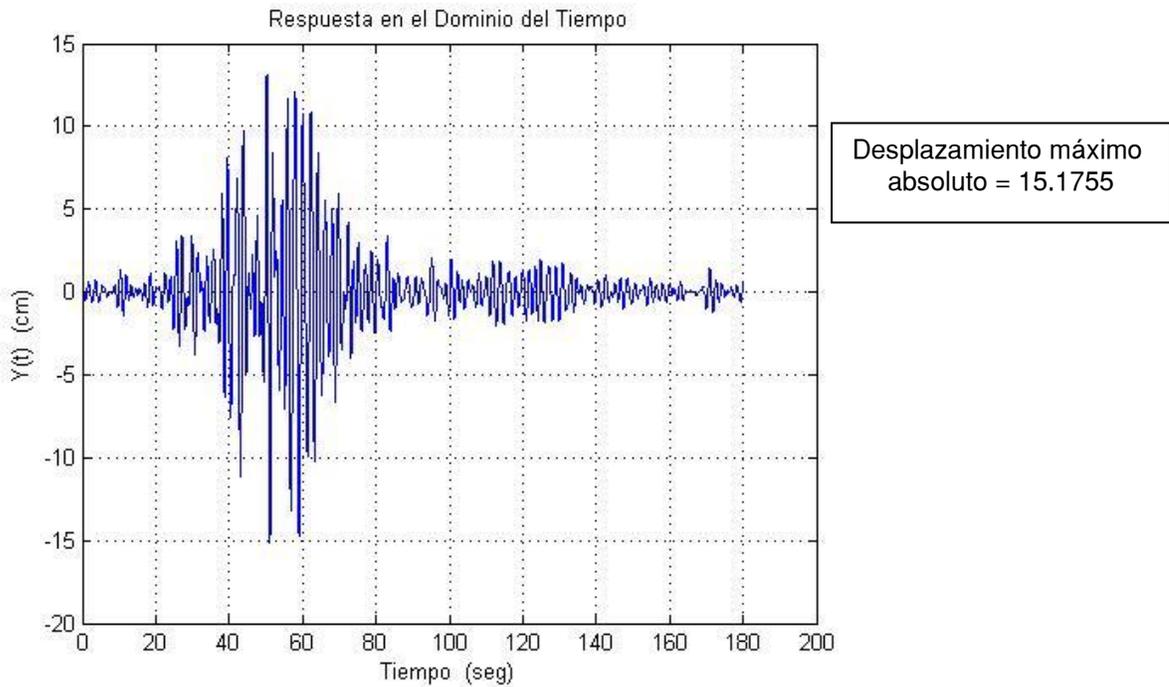
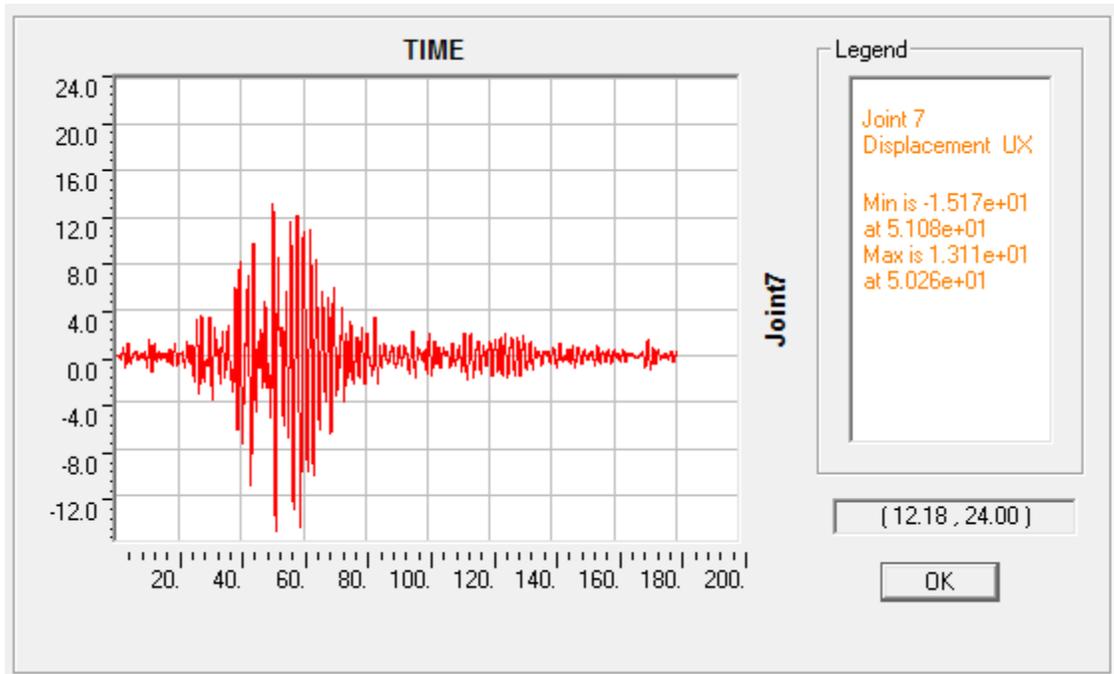
NIVEL 4



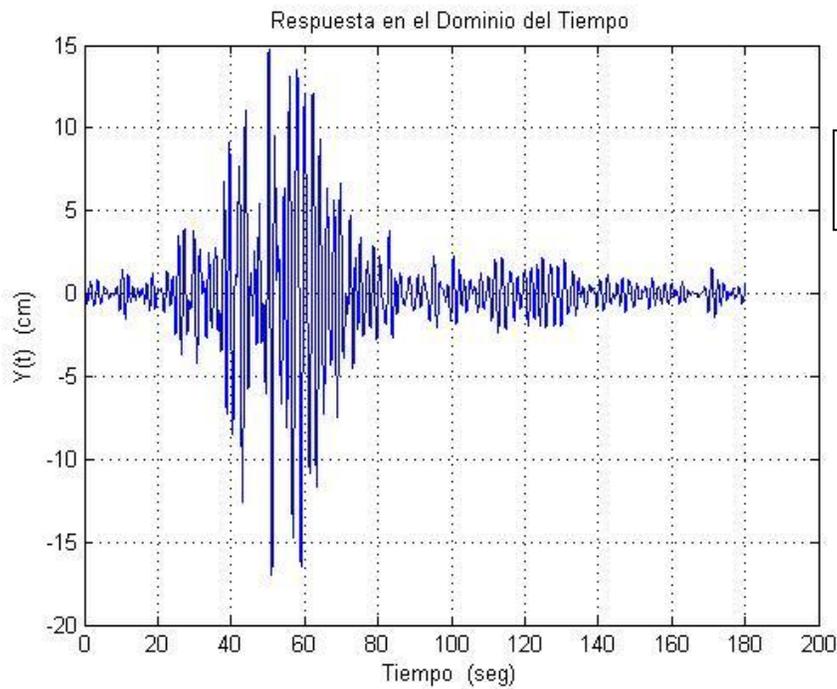
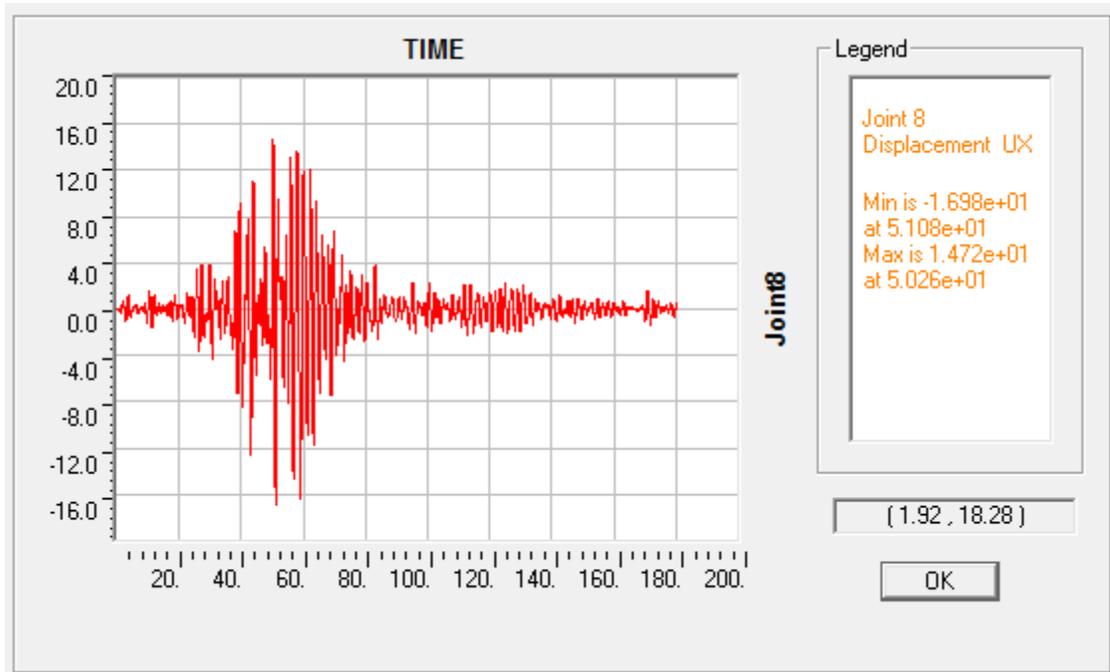
NIVEL 5



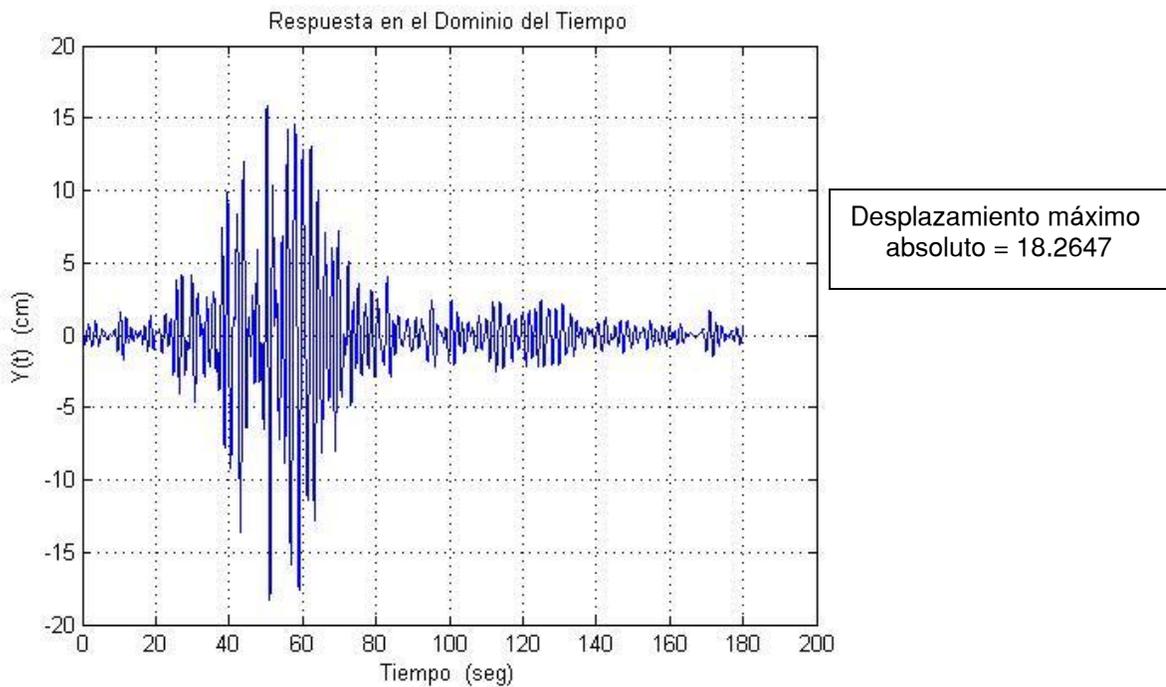
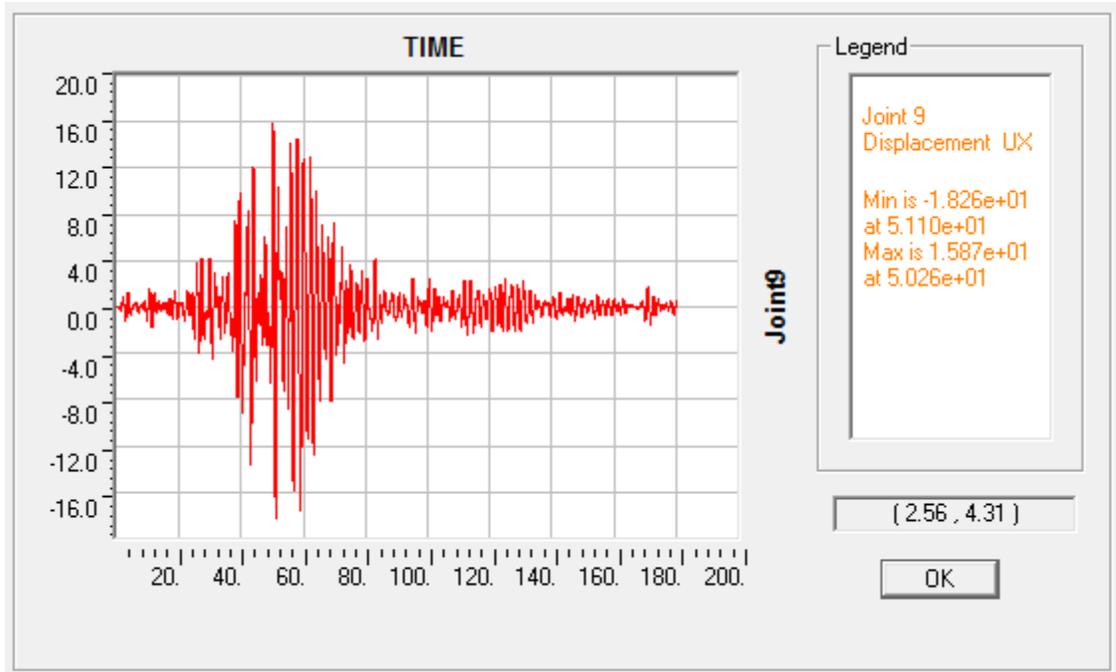
NIVEL 6



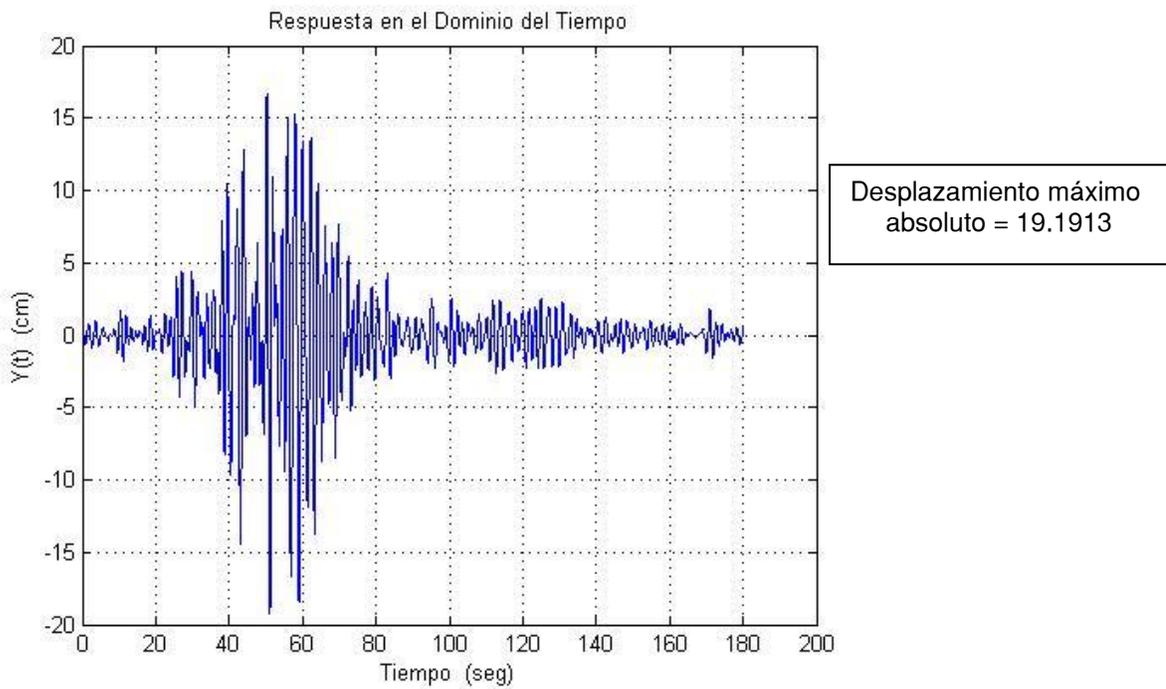
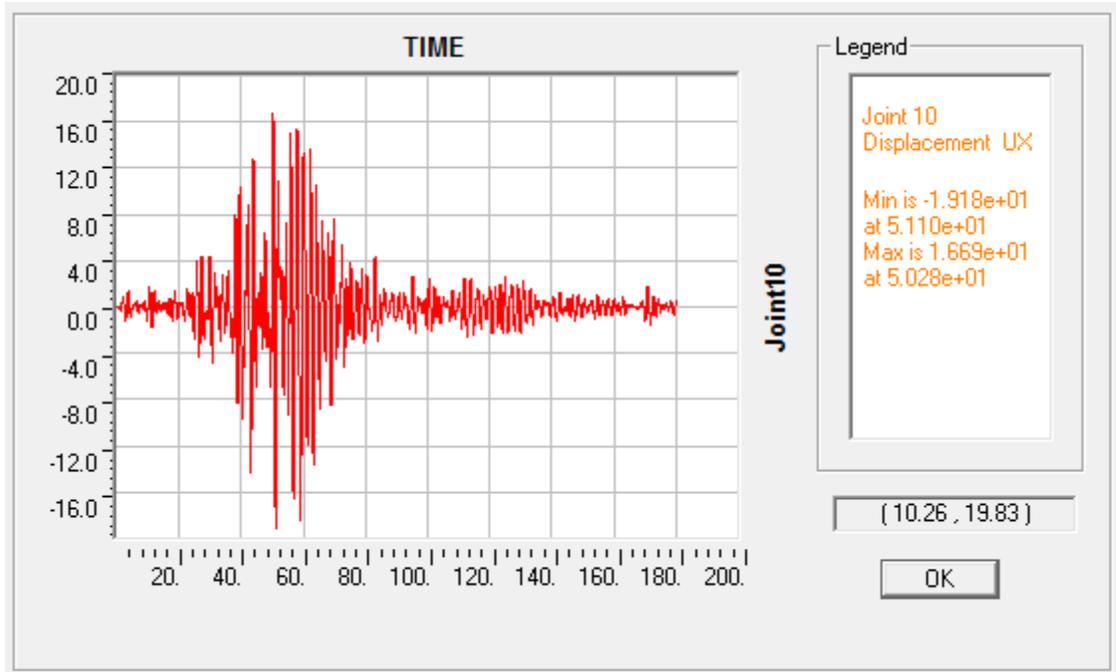
NIVEL 7



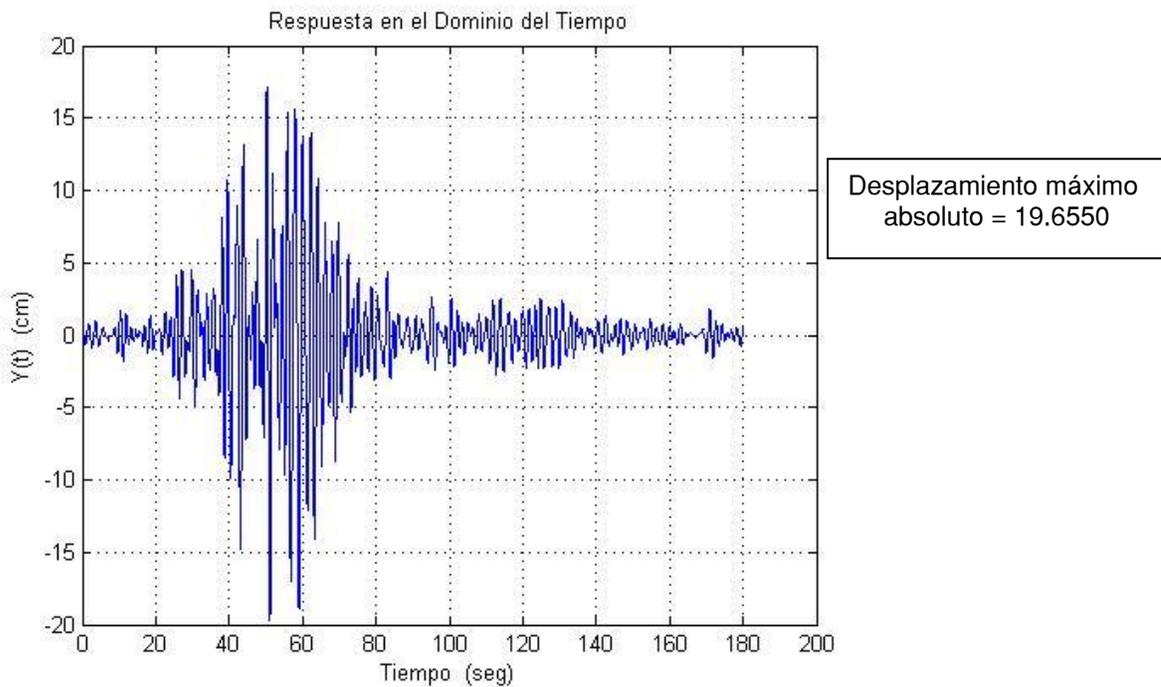
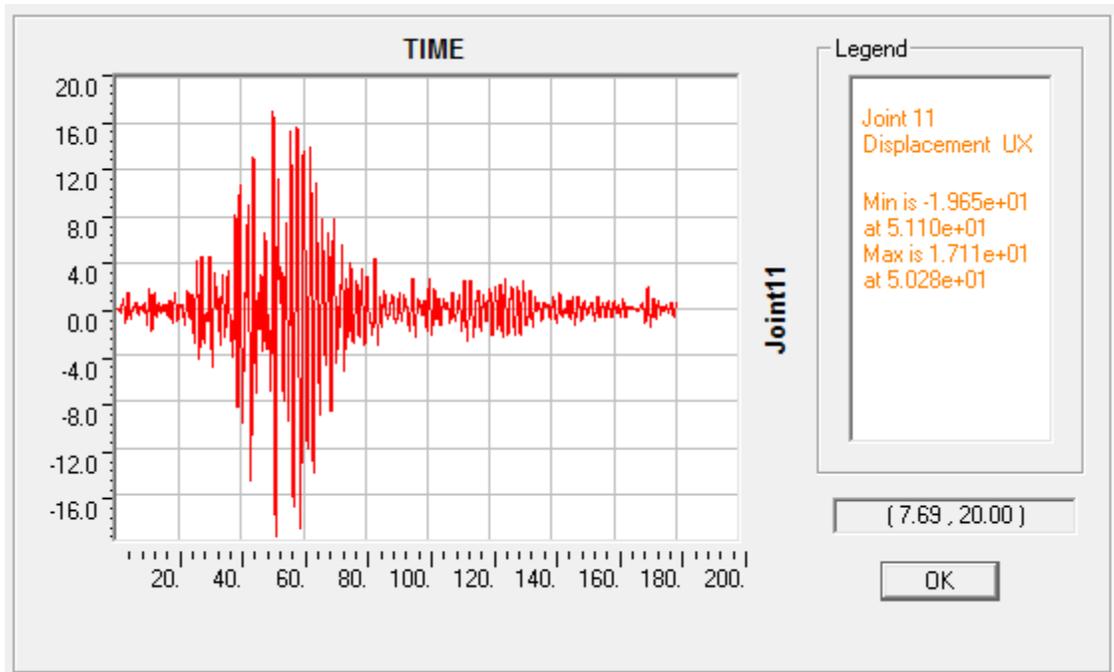
NIVEL 8



NIVEL 9



NIVEL 10



5. Conclusiones

Se presentó un programa para calcular la Respuesta Dinámica de Sistemas de múltiples grados de libertad ante excitaciones arbitrarias.

El programa se realizó en MATLAB, éste tiene algunas ventajas tales como: facilidad de codificación e interpretación y es rápido, además automáticamente pueden mostrar las gráficas correspondientes a los modos de vibrar particulares.

El método que se emplea para el análisis y creación del espectro de respuesta es, mediante la Transformada Rápida de Fourier (FFT) que es una herramienta provista dentro del entorno MATLAB y funciona tanto para un grado de libertad como para múltiples, ya que dentro del método de Análisis Modal la respuesta de n-grados de libertad se obtiene desacoplando cada uno.

El programa comercial que sirvió para la comparación de los resultados y las pruebas al SMGDL, es SAP 2000 v14. Del cual se observan los resultados y comparaciones en las gráficas que corresponden a los desplazamientos máximos por cada nivel. En las mismas se aprecia un margen de error mínimo, que se estimó en ± 0.002 cm para los desplazamientos.

La interfaz de apoyo para el programa se creó bajo la estructura de MATLAB, ya que presenta herramientas interesantes que se pueden utilizar para la manipulación de las gráficas producto del análisis modal.

5. Bibliografía

Alberto S. M., *Ingeniería Sísmica*, 2da ed., Colombia: Ediciones Unidas, 1995.

Crandall S.H. y Strang W., An improvement of the Holzer table based on a suggestion of Rayleigh's, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, Núm. 2, pp. 228-230. 1957

Federick S. M., *Manual del ingeniero Civil*, 2d ed., México: McGraw-Hill, 1984, pp. 6-25. Lepe J. L., *Fundamentos de la Ingeniería Sísmica*, Prentice-Hall, 1971.

Gobierno del Distrito Federal, *Normas Técnicas Complementarias*, tomo 2, Gobierno del Distrito Federal, 2004, pp. 275.

Jack C. M. y James K. Nelson, *Análisis de Estructuras*, México D.F: Alfaomega, 2002.

Luis A.S y Max B.S., *Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal*, México D.F: Editorial Trillas, 2004.

Newmark N.M y Rosenblueth E., *Fundamentals of Earthquake Engineering*, Nueva Jersey, EUA. Prentice-Hall, 1971

Rosenblueth E. y Esteva L., *Diseño Sísmico de Edificios*, Folleto complementario al reglamento de construcciones del Distrito Federal, México D.F. 1962

www.autodesk.com

www.csiberkeley.com

www.bentley.com

www.ssn.unam.mx

1. Bases de cálculo y referencia de programación

1.1. Grados de libertad dinámicos

Desde el punto de vista dinámico, interesan los grados de libertad en los que se generan fuerzas generalizadas de inercia significativas; es decir fuerzas iguales a masa por aceleración o momento de inercia por aceleración angular. Por ejemplo en la figura 2.1 se muestra un marco con 12 grados de libertad estáticos, sin embargo si las fuerzas de inercia importantes son solamente las que generan las masas m_1 y m_2 al moverse lateralmente y las deformaciones de los pisos en su plano son despreciables, tenemos un sistema de dos grados de libertad dinámicos, que son precisamente los desplazamientos 1 y 2 en la figura antes citada. Es importante observar que esto no implica que los restantes giros y desplazamientos se anulen, sino que, aunque asumen valores distintos de cero, no generan fuerzas de inercia de consideración.2.

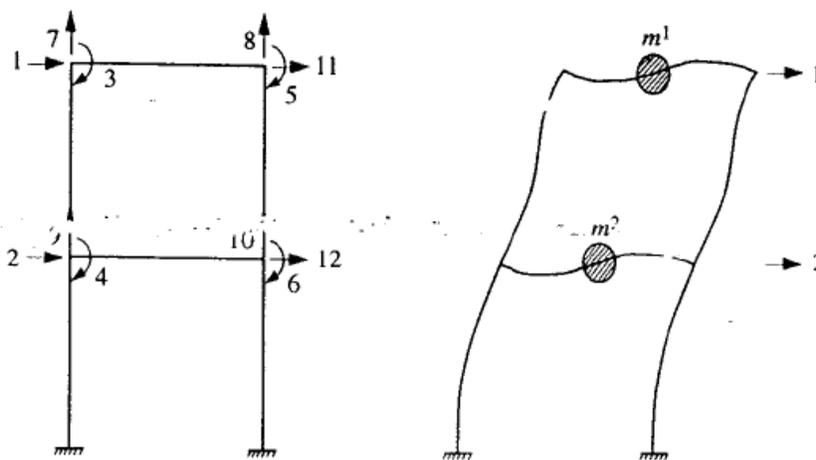


Figura 2.1 Grados de libertad estáticos y dinámicos.

En edificios generalmente se supone que los pisos son diafragmas rígidos en su plano, lo que permite expresar el movimiento lateral de cualquier punto del piso en términos de 3 grados de libertad: dos desplazamientos horizontales y un giro alrededor de su eje vertical como se muestra en la figura 2.1. En vista de que las masas están directamente soportadas por los pisos, es también aceptable suponer que todas las masas están concentradas en los mismos, de manera que las fuerzas de inercia generadas por los desplazamientos laterales se pueden expresar como productos de la masa en cada piso por sus aceleraciones lineales y del momento de inercia de dicha masa por la aceleración angular alrededor del eje vertical que pasa por el centro de las masas. Esto permite efectuar el análisis dinámico de un edificio con modelos que tienen 3 grados de libertad por piso.

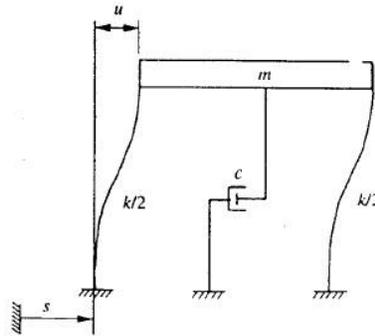


Figura 2.2 Sistema simple de amortiguamiento viscoso

Cuando por simetría no rotan alrededor de ejes verticales, el edificio o sus componentes se pueden modelar como un sistema de un grado de libertad (desplazamiento lateral) por piso. Nótese que la hipótesis que los pisos son diafragmas rígidos implica que las vigas no tienen deformaciones axiales: tal sería el caso del marco de la figura 2.2. Recordando que la matriz de rigideces de este marco es de 12×12 , se puede transformar en una matriz de rigideces lateral de 2×2 , expresada en función de los grados de libertad 1 y 2, mediante el proceso de condensación estática. De esta manera la matriz de rigideces y de masas corresponden a los mismos grados de libertad.

1.2. Sistemas lineales de un grado de libertad

1.2.1. Descripción y ecuación de equilibrio dinámico.

Consideremos el sistema de un piso mostrado en la figura 2.2, constituido por una masa concentrada que puede tener un desplazamiento horizontal u , ligado al terreno mediante varios elementos verticales representados esquemáticamente por dos columnas elásticas y por un amortiguador. Cuando el terreno experimenta un desplazamiento horizontal s , en la ecuación de equilibrio dinámico aparece la fuerza de inercia, igual a la masa por su aceleración absoluta \ddot{x} , la fuerza de rigidez y la de amortiguamiento. En el caso más sencillo, las fuerzas de rigidez y de amortiguamiento son, respectivamente, proporcionales al desplazamiento u y a la velocidad \dot{u} de la masa con respecto a su base. Sean k y c las correspondientes constantes de proporcionalidad que se supone que no cambian con el tiempo; k es lo mismo que la matriz de rigidez lateral (en este caso de 1×1) y c se llama coeficiente o relación de amortiguamiento. El conjunto de m , c y k constituye un sistema lineal de un grado de libertad, con amortiguamiento viscoso o lineal; usando el principio de D'Alembert, la ecuación diferencial de equilibrio dinámico o de movimiento es

$$m\ddot{x} + c\dot{u} + ku = 0$$

El punto sobre una cantidad significativa derivación con respecto al tiempo. Considerando que $x = s + u$, la ecuación anterior se escribe

$$m\ddot{x} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{s} \quad (2.1)$$

Dividiendo esta ecuación entre m y definiendo $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $c_{cr} = 2\sqrt{km}$ y $\zeta = c/c_{cr}$ se llega a:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2u = -\ddot{s} \quad (2.2)$$

ω se denomina frecuencia circular natural del sistema; c_{cr} se conoce como amortiguamiento crítico, que usualmente se expresa como porcentaje. De las definiciones de ω y c_{cr} deducimos que $c_{cr} = 2m\omega$, lo cual muestra que el amortiguamiento crítico está relacionado con la frecuencia fundamental de vibración.

Tabla 2.1 Aplicación del método β de Newmark ($\beta = 1/4$) al sistema de la figura 2.2

t (Seg)	u Exacta	Resultados numéricos						
		u	v	a	Δx^*	Δu	Δv	Δa
0.00	1.0000	1.0000	0.0000	-1.0000	-2.0000	-0.0050	-0.0993	0.0149
0.10	0.9950	0.9950	-0.0993	-0.9851	-5.9603	-0.0148	-0.0973	0.0245
0.20	0.9802	0.9802	-0.1965	-0.9606	-9.8221	-0.0244	-0.0944	0.0338
0.30	0.9559	0.9559	-0.2909	-0.9268	-13.5481	-0.0336	-0.0905	0.0427
0.40	0.9223	0.9223	-0.3815	-0.8841	-17.1027	-0.0424	-0.0859	0.0510
0.50	0.8799	0.8798	-0.4673	-0.8331	-20.4522	-0.0507	-0.0804	0.0588
0.60	0.8292	0.8291	-0.5477	-0.7743	-23.5655	-0.0585	-0.0741	0.0659
0.70	0.7707	0.7706	-0.6218	-0.7084	-26.4140	-0.0655	-0.0672	0.0723
0.80	0.7052	0.7050	-0.6890	-0.6361	-28.9720	-0.0719	-0.0597	0.0779
0.90	0.6334	0.6332	-0.7488	-0.5583	-31.2171	-0.0775	-0.0517	0.0826
1.00	0.5560	0.5557	-0.8005	-0.4757	-33.1500	-0.0822	-0.0432	0.0865
1.10	0.4738	0.4735	-0.8437	-0.3891	-34.6951	-0.0861	-0.0344	0.0895
1.20	0.3878	0.3874	-0.8781	-0.2996	-35.9003	-0.0891	-0.0254	0.0916
1.30	0.2988	0.2983	-0.9035	-0.2080	-36.7373	-0.0912	-0.0162	0.0928
1.40	0.2077	0.2072	-0.9197	-0.1152	-37.2012	-0.0923	-0.0069	0.0930
1.50	0.1154	0.1148	-0.9265	-0.0222	-37.2914	-0.0925	0.0024	0.0923
1.60	0.0229	0.0223	-0.9241	0.0701	-37.0105	-0.0918	0.0115	0.0907
1.70	-0.0688	-0.0695	-0.9126	0.1608	-36.3650	-0.0902	0.0205	0.0882
1.80	-0.1590	-0.1598	-0.8921	0.2490	-35.3650	-0.0878	0.0291	0.0848
1.90	-0.2468	-0.2475	-0.8630	0.3338	-34.0239	-0.0844	0.0374	0.0807
2.00	-0.3312	-0.3319	-0.8256	0.4145	-32.3584	-0.0803	0.0452	0.0758
3.00	-0.8449	-0.8453	-0.1270	0.8580	-3.3881	-0.0084	0.0858	-0.0002
.....
4.00	-0.5722	-0.5714	0.6162	0.5097	25.7921	0.0640	0.0475	-0.0688
.....
5.00	0.1741	0.1758	0.7505	-0.2508	29.6671	0.0736	-0.0286	-0.0708
.....
6.00	0.6975	0.6984	0.2163	-0.7200	7.2536	0.0180	-0.0725	-0.0107

$m = 1.00$

$k = 1.00$

$\zeta = 0.05$

$c = 0.10$

$\omega = 1.00$

$\omega_a = 0.998749$

$\zeta\omega/\omega_a = 1.001252$

$\zeta\omega/\omega_a = 0.050062$

$u_0 = 1.00$

$u_0 = 0.00$

$\Delta t = 0.1$

$k^* = k + \frac{2c}{\Delta t} + \frac{4m}{\Delta t^2} = 403$, según la ecuación 2.5, la solución exacta es

$$u = \exp(-0.05t)\{0.050062 \operatorname{sen}(0.998749t) + \cos(0.998749t)\}$$

1.2.2. Vibraciones libres

El sistema descrito en la sección precedente vibra libremente cuando la masa se mueve, pero el terreno permanece inmóvil y no actúan fuerzas exteriores. En este caso el segundo miembro de la ecuación 2.2 se anula y su solución es:

$$u(t) = Ae^{-\xi\omega t} + \cos \omega_a (t-\gamma) \quad (2.3)$$

Donde

$$\omega_a = \omega\sqrt{1-\xi^2} \quad (2.4)$$

ω_a es la frecuencia natural amortiguada del sistema y A y γ son constantes que dependen de las condiciones iniciales, es decir, del desplazamiento y la velocidad cuando $t = 0$.

La ecuación 2.3 da $u(t) = A \cos \omega(t-\gamma)$ cuando no existe amortiguamiento ($\xi=0$), y se dice que la masa tiene un movimiento armónico. El tiempo T , que dura un ciclo de oscilación completo, se llama periodo de vibración natural del sistema y es igual a $2\pi/\omega$. Por otro lado, si el amortiguamiento es igual a el crítico ($\xi=1$), encontramos que $\omega_a = 0$ y, por tanto $u(t) = Ae^{-\xi\omega t}$, indicando que la masa se mueve sin oscilar y vuelve a la posición de equilibrio estático, $u=0$, luego de un tiempo infinito.

En el análisis de edificios es de mayor interés el caso de amortiguamientos menores que el crítico, para lo cual, si el desplazamiento y la velocidad de la masa en el instante $t=0$ valen, respectivamente u_0 y \dot{u}_0 , obtenemos:

$$u(t) = Ae^{-\xi\omega t} \{ (\dot{u}_0 + \xi\omega u_0)(\operatorname{sen} \omega_a t) + \omega_a u_0 \cos \omega_a t \} \quad (2.5)$$

Esta ecuación describe un movimiento oscilante de la masa con frecuencia ω_a y amplitud exponencial decreciente como se ilustra en la figura 2.2. El periodo amortiguado $T_a = 2\pi/\omega_a$, es el tiempo que tarda un ciclo completo de oscilación, y es una propiedad de la estructura, independiente de como se excite.

Normalmente, el amortiguamiento de estructuras de edificios no excede de 10% del crítico, o sea que típicamente $\xi < 0.1$. Aun para este límite relativamente alto, la ecuación 2.3 da $\omega_a = 0.995\omega$; de aquí se elige que en casos prácticos la influencia del amortiguamiento en la frecuencia de vibración es pequeña, siendo su efecto más importante disminuir la amplitud de dicha vibración conforme avanza el tiempo, según lo expresa el término exponencial de la ecuación 2.5 y se ilustra en la figura 2.2.

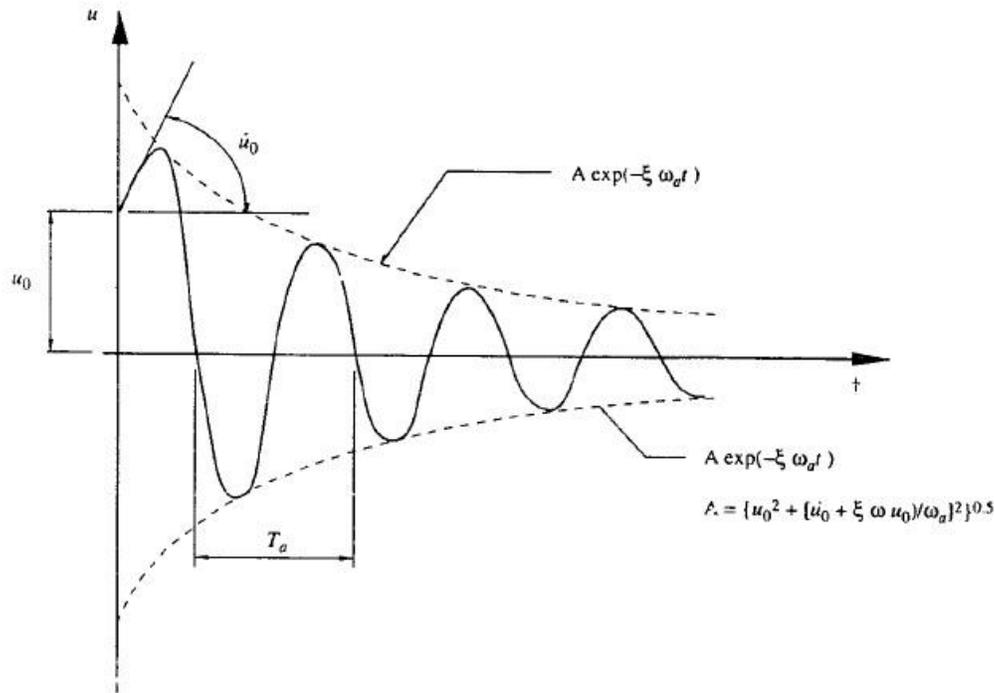


Figura 2.3 Vibraciones libres del sistema de la figura 2.2

1.2.3. Respuesta a movimientos del terreno

El segundo término \ddot{s} , de la ecuación 2.2 describe cómo varía la aceleración del terreno con el tiempo y se conoce como acelerograma. En textos de dinámica estructural se muestra que, cuando tal término es nulo, la solución de la ecuación aludida es:

$$u(t) = 1/\omega_a \int \ddot{s}(\tau) \exp \{ -\xi \omega (t - \tau) \} \sin \omega_a (t - \tau) d\tau \quad (2.6)$$

Esta expresión hace ver que, como en el caso de vibraciones libres, las dos propiedades de un sistema de un grado de libertad que determinan su respuesta ante un movimiento prescrito del terreno con su frecuencia natural y su fracción de amortiguamiento crítico. La velocidad y la aceleración de la masa se calculan derivando sucesivamente $u(t)$ con respecto al tiempo, y otras respuestas de interés, como la fuerza en el resorte se pueden obtener en términos del desplazamiento y sus derivadas. Para fines de diseño, interesan normalmente solo los valores máximos absolutos de tales respuestas.

1.3. Método paso a paso, método β de Newmark

Un acelerograma no es una función algebraica del tiempo, sino una serie de valores numéricos de la aceleración para diferentes instantes; usualmente a intervalos constantes de tiempo Δt , que varían entre 0.005 y 0.02 segundos. Para duraciones normales de temblores, entre 20 y 60 segundos, se tienen unos pocos millares de valores de la

aceleración. La figura 2.4 muestra el acelerograma registrado por la Secretaría de Comunicaciones y Transportes de la Ciudad de México durante el temblor del 19 de septiembre de 1985, incluyendo las historias de velocidad y desplazamiento que se obtuvieron integrando sucesivamente dicho acelerograma. Los valores máximos de aceleración, velocidad y desplazamiento de terreno son 168 cm/seg^2 , 60.5 cm/seg y 222 cm , respectivamente.

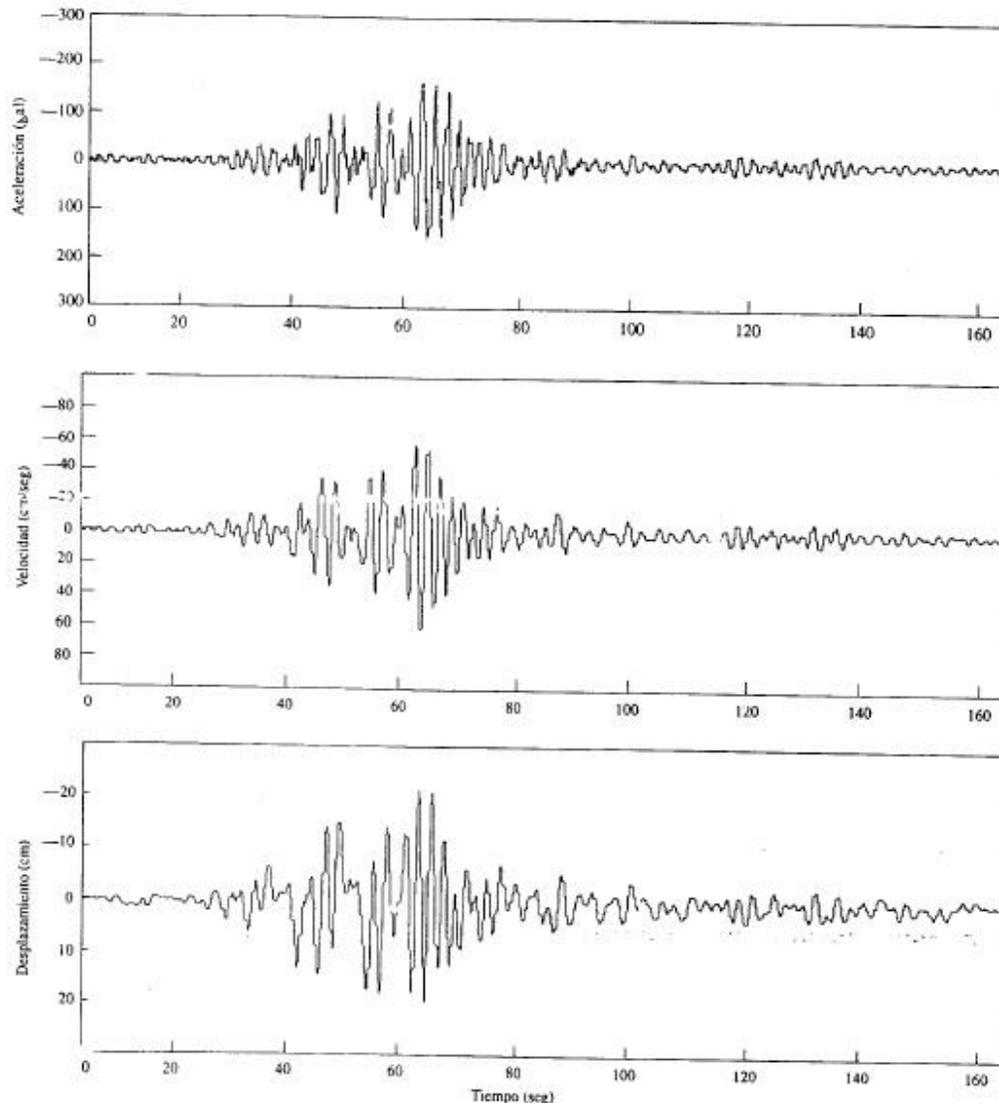


Figura 2.4 Aceleraciones, velocidades y desplazamientos del registro de la Secretaría de Comunicaciones y Transportes del temblor del 19 de septiembre de 1985

Dada la manera en que se expresan los acelerogramas, en vez de calcular algebraicamente la integral de la ecuación 2.6 es conveniente resolver numéricamente las ecuaciones de equilibrio dinámico con la ayuda de computadoras. Para este fin existe una amplia variedad de métodos consistentes en calcular la solución para $t + \Delta t$ a partir de la solución

ya conocida en t . estos métodos denominados paso a paso, pueden aplicarse tanto a estructuras lineales como a no lineales de cualquier número de grados de libertad, y están incorporados en una gran cantidad de los programas comerciales de análisis estructural. Se presenta uno de los más populares, originalmente propuesto por Newmark (1962); aunque nos limitamos a sistemas de un grado de libertad, veremos posteriormente que los conceptos expuestos se aplican al análisis paso a paso de estructuras más complejas. Considerando el sistema de la figura 2.2, cuya ecuación de movimiento es la 2.1, que escribiremos ahora como

$$ma + cv + ku = -m\ddot{u} \quad (2.7)$$

Donde a , v y u son la aceleración, velocidad y desplazamiento, respectivamente de la masa m . Supondremos que estas 3 cantidades se conocen en el instante y usaremos el subíndice 1 para denotar sus valores en $t + \Delta t$. Se debe también cumplir

$$ma_1 + cv_1 + ku_1 = -m\ddot{u}_1 \quad (2.8)$$

Definiendo $\Delta a = a_1 - a$, $\Delta v = v_1 - v$, $\Delta u = u_1 - u$; y restando las 2 últimas ecuaciones se deduce que:

$$m\Delta a + c\Delta v + k\Delta u = -m(\dot{s}'_1 - \dot{s}') \quad (2.9)$$

Newmark propuso emplear las siguientes ecuaciones para calcular v_1 y u_1 :

$$v_1 = v + 1/2(a + \beta a_1)\Delta t \quad (2.10)$$

$$u_1 = u + v\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)a + \beta a_1\right](\Delta t)^2 \quad (2.11)$$

Usando conceptos básicos de cinemática se puede deducir cómo varía la aceleración con el tiempo en el lapso Δt . Por ejemplo $\beta = 1/4$ corresponde a la aceleración constante de dicho lapso, igual al promedio de a, a_1 , mientras que una variación lineal de aceleraciones entre a y a_1 conduce a $\beta = 1/6$.

Tenemos ahora que resolver el sistema de tres ecuaciones simultáneas 2.9, 2.10 y 2.11 con tres incógnitas: a_1, v_1 y u_1 o, de manera equivalente $\Delta a, \Delta v$ y Δu . En lo que sigue se considera $\beta = 1/4$, aunque el procedimiento es similar para cualquier otro valor de β . La ecuación 2.11 se convierte en:

$$u_1 = u + v\Delta t + 1/4(a + a_1)(\Delta t)^2 \quad (2.12)$$

O

$$\Delta u = u_1 - u = v\Delta t + 1/4(a + a_1)(\Delta t)^2 \quad (2.13)$$

De 2.10 obtenemos:

$$\Delta v = v_1 - v = 1/2(a + a_1)(\Delta t) \quad (2.14)$$

Despejando $(a + a_1)(\Delta t)$ de esta ecuación y sustituyendo en 2.13 se llega a:

$$\Delta v = 2\left(\frac{\Delta u}{\Delta t} - v\right) \quad (2.15)$$

De 2.13 también deducimos que

$$\frac{4(\Delta u - v\Delta t)}{(\Delta t)^2} = a + a_1 = a_1 - a + 2a$$

$$\Delta a = a_1 - a = \frac{4(\Delta u - v\Delta t)}{\Delta t^2} - 2a \quad (2.16)$$

Empleando las ecuaciones 2.15 y 2.16 para substituir Δv y Δa en 2.9, Δu queda como la única incógnita que se despeja con el resultado siguiente:

$$\Delta u = \Delta s^*/k^* \quad (2.17)$$

Donde

$$k^* = k + 2\frac{c}{\Delta t} + 4m/\Delta t^2 \quad (2.18)$$

$$\Delta s^* = -m(\ddot{s}_1 - \ddot{s}) + \left[4\frac{m}{\Delta t^2} + 2c\right]v + 2ma \quad (2.19)$$

Cuando el intervalo de tiempo es constante, el método se aplica como sigue:

- a) Calcúlese k^* , que se mantienen constante (ecuación 2.18)
- b) Para cada paso:
 - b.1 calculándose Δs y Δu (ecuaciones 2.19 y 2.17)
 - b.2 determinándose Δv y Δa (ecuaciones 2.15 y 2.16)
 - b.3 calcúlense la aceleración, velocidad y desplazamiento para $t_1 = t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} a_1 &= a + \Delta a \\ v_1 &= v + \Delta v \\ u_1 &= u + \Delta u \end{aligned}$$

- c) Se prosigue al paso siguiente con $a = a_1$, $v = v_1$, $u = u_1$.

Para comenzar, se toma en cuenta que, usualmente, antes del temblor la masa está en reposo, es decir que cuando $t = 0$ tenemos que $v = u = 0$. Como 2.7 se debe de satisfacer en todo momento, en el primer paso el equilibrio dinámico requiere que $a = -\ddot{s}(0)$, con lo que se conocen los valores iniciales de las tres incógnitas.

Para ilustrar el método y apreciar su precisión consideraremos el sistema de la figura 2.2 vibrando libremente después de un desplazamiento inicial unitario, con velocidad inicial nula; supongamos también que m y k asumen valores unitarios y que el amortiguamiento es 5% del crítico. La aplicación del método de Newmark se presenta en la tabla 2.1, para los 6 primeros segundos con un intervalo de $\Delta t = 0.1$ segundos. Se presentan resultados parciales obtenidos en los pasos b.1 b.2.

En este caso por tratarse de vibraciones libres, $s = 0$ en todos los pasos, y en el paso inicial $u = 1$, $v = 0$ y de la ecuación 2.7 se deduce que $a = -u = -1.0$. Se ha incluido en la tabla citada los desplazamientos calculados con la solución analítica dada por la ecuación 2.5 y se encuentra concordancia de tres cifras significativas con los valores numéricos. Se puede lograr mayor precisión con intervalos menores de integración, aunque es normalmente suficiente usar el intervalo en el que se da el acelerograma a uno tal que $\frac{\Delta t}{T} < 0.1$, donde T es el periodo fundamental de sistema.

Muchos programas emplean el método de Newmark con $\beta = 1/4$, debido a su sencillez y precisión, a que se aplica a estructuras de múltiples grados de libertad, y a que su autor demostró que con esta elección el método es incondicionalmente estable, es decir que nos lleva a resultados considerablemente precisos como consecuencia de las aproximaciones numéricas, independiente mente del valor de Δt .

1.4. Espectro de respuesta elástico

En secciones precedentes se han presentado métodos analíticos y numéricos para calcular la respuesta de sistema de un grado de libertad, a un movimiento de la base descrito por su acelerograma $\ddot{s}(t)$. Recuérdese que las propiedades del sistema que determinan tal respuesta son el periodo (o la frecuencia) de vibración, T , y la fracción de amortiguamiento crítico ξ . Para entender de mejor manera el efecto de un acelerograma en diferentes estructuras conviene mantener fija la fracción de amortiguamiento crítico e ir calculando alguna respuesta máxima, usualmente la aceleración, para distintos valores T ; los resultados se grafican con T como abscisa y se obtiene así el espectro de respuesta del acelerograma. Es frecuente obtener primero el espectro de desplazamientos relativos $D = \max(u)$, y en lugar de velocidades y desplazamientos y dibujar las cantidades $V = \omega D$ y $A = \omega^2 D$, que se denominan espectros de seudovelocidades y pseudoaceleraciones, respectivamente. Nótese que la fuerza máxima que debe resistir el elemento elástico como consecuencia del temblor en cuestión es:

$$F = kD = \left(\frac{k}{m}\right)mD = m\omega D = mA$$

Entonces conocida la pseudoaceleración espectral, F se calcula multiplicándola por la masa m . Ya que $m = \frac{W}{g}$, donde W es el peso y g es la aceleración de la gravedad, F también es

igual a $W(A/g)$, por lo cual se acostumbra expresar la pseudoaceleración como una fracción de g . Aquí definiremos $S_a = A/g$, y así tenemos que $F = WS_a$, es decir que S_a es el cociente de la fuerza sísmica máxima entre el peso.

La figura 2.5 presenta los espectros de pseudoaceleraciones (S_a) del acelerograma registrado por la Secretaría de Comunicaciones y Transportes durante el temblor del 19 de septiembre de 1985, correspondientes a amortiguamientos del 2, 5 y 10 por ciento del crítico, se nota que a mayor amortiguamiento menor respuesta, para cualquier periodo y que para un amortiguamiento dado, existen periodos (alrededor de 2 segundos en este caso) para los que la respuesta es sensiblemente mayor que para los demás.

Una característica adicional de estos espectros es que cuando $T = 0$, S_a es igual a la aceleración máxima del terreno, es decir el valor máximo de $\ddot{s}(t)$.

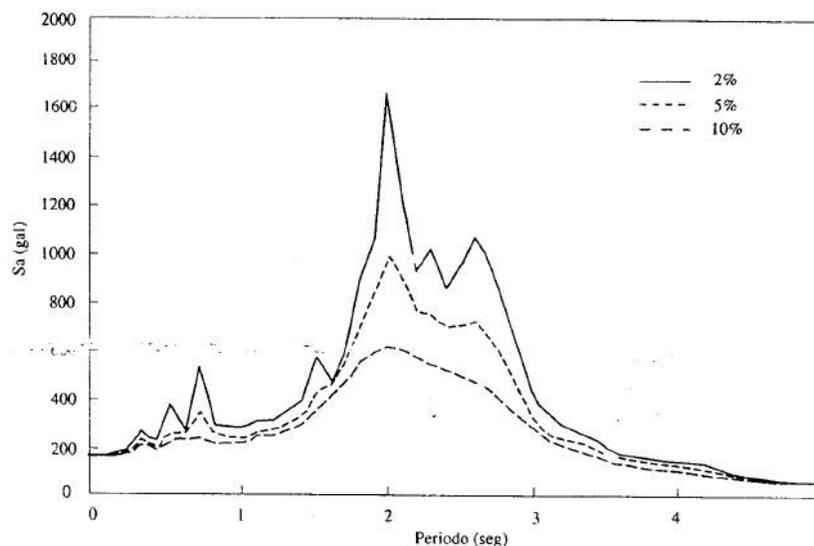


Figura 2.5 Espectros de pseudoaceleraciones del registro de la Secretaría de Comunicaciones y Transportes durante el temblor del 19 de septiembre de 1985

1.5. Sistemas lineales de varios grados de libertad sin torsión

En edificios es usualmente aceptable que las masas están concentradas en los niveles de los pisos y que las fuerzas de inercia son solo laterales; por ello lo que sigue se limita a tratar este caso, aunque varios conceptos son aplicables a otros sistemas estructurales con masas concentradas cuyos apoyos tengan todos el mismo movimiento.

1.6. Ecuaciones de equilibrio dinámico

Considerando el sistema de 3 grados de libertad mostrado en la figura 2.6, cuyos apoyos tienen un movimiento $s(t)$ y cuyas masas m_1, m_2 y m_3 tienen desplazamientos u_1, u_2 y u_3 , respectivamente. Las fuerzas de inercia en este caso son $m_1(\ddot{u}_1 + \ddot{s})$, $m_2(\ddot{u}_2 + \ddot{s})$ y $m_3(\ddot{u}_3 + \ddot{s})$. Las fuerzas de los elementos elásticos se calculan con el producto de la matriz de rigidez lateral K por los desplazamientos laterales, es decir

$$F_e = Ku$$

Donde, para el caso de la figura 2.6

$$K = \begin{matrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{31} & K_{33} \end{matrix}$$

Donde $k_{ij} = k_{ji}$

$$F_e = \begin{matrix} F_{e1} \\ F_{e2} \\ F_{e3} \end{matrix}$$

$$u = \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix}$$

De análoga manera las fuerzas de amortiguamiento viscoso se pueden expresar como la matriz de amortiguamiento por las velocidades, obteniendo

$$F_a = C\dot{u}$$

Donde el punto denota derivación con respecto al tiempo. Veremos más adelante que no es necesario calcular C y que el efecto del amortiguamiento se toma en cuenta en los espectros de diseño.

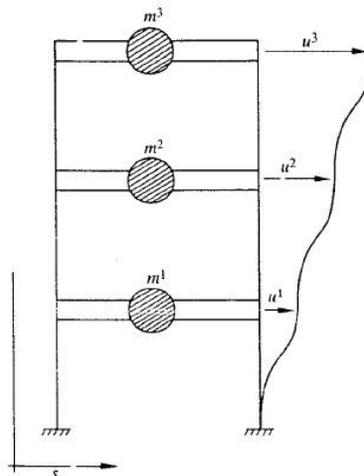


Figura 2.6 Sistema de tres grados de libertad dinámicos

Para cada masa la suma de todas las fuerzas deberá ser igual a cero. Así se llega a que las ecuaciones de equilibrio dinámico son

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = -M1\ddot{s} \quad (2.20)$$

M se denomina matriz de masas y para la estructura de la figura 2.6, es igual a:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

En la expresión 2.20 hemos definido también:

$$1\ddot{s} = \begin{bmatrix} 1 & \ddot{s} \\ 1 & \ddot{s} \\ 1 & \ddot{s} \end{bmatrix}$$

1.7. Vibraciones libres no amortiguadas

En lugar de resolver la ecuación 2.20, conviene considerar el caso más simple en el que no existen amortiguadores (sus efectos se incluyen después de manera aproximada) y no existe movimiento del terreno, con lo cual dicha ecuación se convierte en:

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad (2.21)$$

Ahora bien, toda estructura elástica puede vibrar libremente en forma tal que el desplazamiento de cada una de sus masas con respecto a su posición de equilibrio estático es igual al producto de una función de la posición de la masa considerada por una función del tiempo, que es la misma para todas las masas. En otras palabras los desplazamientos se pueden expresar de la siguiente manera:

$$u(t) = Zq(t) \quad (2.22)$$

Donde para el caso de la figura 2.6

$$u = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} ; Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Se dice que una estructura de esta manera vibra en sus modos naturales; el conjunto de valores z_j (que son constantes independientes de t) se denomina forma del modo y el periodo de la función del tiempo $q(t)$, en caso de existir se llama periodo natural.

Derivando la ecuación 2.22 se obtiene $\ddot{u}(t) = Z\ddot{q}(t)$ y sustituyendo en 2.21 llegamos a:

$$MZ\ddot{q} + Kzq = 0 \quad (2.23)$$

Por sencillez se han omitido los (t) . Para la masa i el desarrollo de la última expresión da:

$$m_i z_i \ddot{q} + (\sum_j K_{ij} z_i) q = 0 \quad (2.24)$$

De donde

$$\ddot{q}/q = \sum_j K_{ij} z_i / m_i z_i$$

El primer miembro de la ecuación es función de t , mientras que el segundo no, por tanto ambos deben de ser constantes para que la igualdad subsista. Si llamamos $-\omega^2$ a este valor constante, obtenemos:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

Cuya solución es:

$$q = a \text{ sen } \omega (t - \tau) \quad (2.25)$$

De acuerdo con lo anterior existen modos de vibración que satisfacen las condiciones de la expresión 2.22. Estos son tales que el movimiento de cada masa es armónico simple con periodo natural $T = 2\pi/\omega$; ω se llama frecuencia natural circular. Derivando 2 veces la ecuación 2.25 se tiene

$$\ddot{q} = -\omega^2 a \text{ sen } \omega (t - \tau) = -\omega^2 q$$

Sustituyendo en 2.16 y considerando que $q \neq 0$, queda

$$(K - \omega^2 M)z = 0 \quad (2.26)$$

Que es un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Para que existan valores de Z distintos de cero es necesario que el determinante del sistema se anule, esto es, que

$$| K - \omega^2 M | = 0 \quad (2.27)$$

1.8. Frecuencias y modos de vibración

Matemáticamente la expresión 2.27 constituye un problema de valores característicos. Desarrollando el determinante se obtiene una ecuación algebraica de grado n cuya incógnita es ω^2 , siendo n el número de grados de libertad, cuya solución conduce a n valores de ω^2 , es decir a n frecuencias naturales de vibración ω , que corresponden a otros tantos periodos naturales $2\pi/\omega$. Para estructuras estables los valores de ω^2 son reales y positivos, y sus raíces cuadradas son las frecuencias naturales. Se acostumbra numerar a las ω en orden creciente; así la primera frecuencia ω_1 (llamada frecuencia fundamental) tiene el menor valor, y la última ω_n , el mayor. Remplazando cada valor de la frecuencia ω_j en 2.26 podemos obtener vectores Z_j diferentes de cero; cada uno de ellos se llama modo de vibración. No resultan soluciones únicas para cada modo sino solamente valores relativos entre las z_{ij} es decir que no están definidas las amplitudes de las vibraciones, sino las relaciones entre todas ellas. Se demuestra que los modos de vibración tienen las siguientes propiedades:

- a) Ortogonalidad con respecto a la matriz de masas,

$$Z_j^T M Z_r = 0 \quad \text{si } j \neq r \quad (2.28)$$

- b) Ortogonalidad con respecto a la matriz de rigideces

$$Z_j^T M Z_r = 0 \quad \text{si } j \neq r \quad (2.29)$$

- c) Los modos naturales constituyen un conjunto completo, lo que significa que cualquier configuración de los desplazamientos u puede expresarse como una combinación lineal de las Z_j , es decir:

$$u = \sum_j a_j Z_j$$

Los productos de $m_j^* = Z_j^T M Z_j$ y $k_j^* = Z_j^T K Z_j$, son cantidades escalares que se dominan masa y rigidez generalizadas del modo j , respectivamente. Sus valores dependen de la escala de cada modo, aunque el cociente del segundo sobre el primero se mantiene constante y es igual al cuadrado de la frecuencia del modo en cuestión.

1.8.1. Cálculo numérico de modos y frecuencias de vibrar

El procedimiento seguido en la sección precedente para obtener modos y periodos de vibrar es laborioso e impráctico en sistemas de más grados de libertad. Por ello se han desarrollado métodos numéricos de aproximaciones sucesivas.

1.8.1.1. Método de Newmark

Este método, propuesto por su autor en 1943, está basado en el proceso de iteraciones de Stodola-Vianello (Rosenblueth y Estava, 1962). En la forma en que a continuación se describe, el método es aplicable al cálculo del modo fundamental de vibraciones de las estructuras llamadas sencilla o cercanamente acopladas. En estas estructuras la masa de los pisos intermedios está ligada solo a la de los pisos superior e inferior mediante resortes que representan las rigideces. En su forma más general el método se puede aplicar a cualquier estructura lineal con acoplamiento entre las diferentes masas (Newmark y Rosenbleuth, 1971). Los pasos en qué consiste el método se han aplicado en la tabla 2.2 a la estructura de la figura 2.7 y son los siguientes:

- a) Supóngase una forma \mathbf{X} para el modo. Esta es la que aparece en el renglón 1 de la tabla. Para comenzar, es usualmente apropiado suponer valores iguales al número de orden del piso (de abajo hacia arriba).
- b) Obténgase la fuerza de la inercia en cada masa correspondiente de la configuración supuesta. Estas fuerzas serán $\mathbf{MX}\omega^2$, como se desconoce ω^2 , se calculan los productos $\mathbf{MX} = \mathbf{F}\omega^2$, que forman la segunda región de la tabla.
- c) A partir de las fuerzas de inercia calcúlense las fuerzas cortantes en los entrepisos, también divididas entre ω^2 ; esto es, se calcula \mathbf{V}/ω^2 , como se anota en el tercer renglón de la tabla.
- d) Dividiendo las fuerzas cortantes entre las rigideces de entrepiso, obténgase las deformaciones de entrepiso también divididas entre ω^2 . Esto se presenta en el renglón cuarto de la tabla como $\Delta\mathbf{Y}/\omega^2$.
- e) Acumulando deformaciones de entrepiso determínese una nueva configuración de los desplazamientos de las masas \mathbf{Y}/ω^2 (quinto renglón de la tabla).
- f) Obténgase ω^2 para cada masa, como los cocientes $X_i/(Y_i/\omega^2)$; así se llega al sexto renglón de la tabla. Si la configuración \mathbf{X} supuesta es la correcta, resultara el mismo valor para todas las masas; en caso contrario, es necesario repetir todos los pasos empezando con una forma de modo proporcional a \mathbf{Y}/ω^2 hasta que se obtengan valores de ω^2 suficientemente parecidos en todas las masas. Así se obtiene una convergencia en general bastante rápida.

La tabla 2.2 incluye 3 iteraciones, que llevaron a una aproximación suficiente. Los valores de \mathbf{X} en cada iteración se normalizaron de manera que la masa del primer piso tuviese un desplazamiento unitario, lo cual permite apreciar cómo se va modificando de una iteración a otra la forma del modo. Para calcular la frecuencia se pueden promediar los valores del último ciclo o, mejor aún, determinarla con el cociente de Schwartz (que es la forma del cociente de Rayleigh) como sigue.

$$\omega^2 = \frac{\sum_i (F_i/\omega^2)(Y_i/\omega^2)}{\sum_i F_i(Y_i/\omega^2)^2}$$

Se emplean los valores de F_i y Y_i del último ciclo.

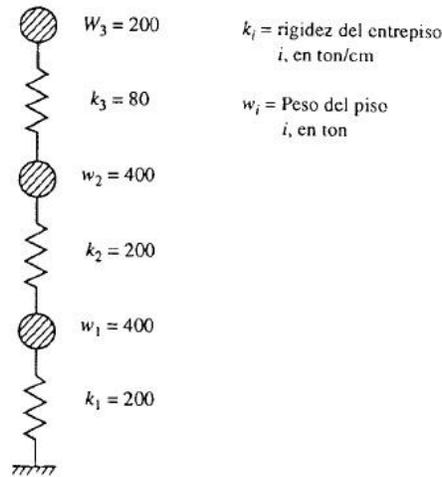


Figura 2.7. Diagrama de masas

Renglón	K (ton/cm)	200		200		200	
		M ($\frac{\text{ton} \cdot \text{seg}^2}{\text{cm}}$)	0.408	0.408	0.204		
1	X		1.00	2.000	3.000		
2	F/ω^2		0.408	0.816	0.612		
3	V/ω^2	1.836		1.428	0.612		
4	$\Delta Y/\omega^2$	0.00918		0.00714	0.00765		
5	Y/ω^2		0.00918	0.01632	0.02397		
6	ω^2		109	123	125		
1	X		1.000	1.780	2.610		
2	F/ω^2		0.408	0.726	0.532		
3	V/ω^2	1.664		1.258	0.532		
4	$\Delta Y/\omega^2$	0.00837		0.00629	0.00665		
5	Y/ω^2		0.00837	0.01466	0.2131		
6	ω^2		119	121	122		
1	X		1.000	1.750	2.550		
2	F/ω^2		0.408	0.714	0.520		
3	V/ω^2	1.642		1.234	0.520		
4	$\Delta Y/\omega^2$	0.00821		0.00617	0.0065		
5	Y/ω^2		0.00821	0.01438	0.02088		
6	ω^2		121.8	121.7	122.1		
			1.000	1.752	2.543		

Tabla 2.2 Método de Newmark

$$\omega^2 = \frac{\sum_i (F_i / \omega^2) (Y_i / \omega^2)}{\sum_i F_i (Y_i / \omega^2)^2} = \frac{0.024475}{0.000201} = 121.0 \text{ seg}^{-2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.5686 \text{ seg.}$$

1.8.1.2. Método de Holzer

Para calcular modos superiores al primero, podemos emplear el procedimiento de Holzer (Crandall y Strang, 1957). Este método es solamente aplicable a estructuras sencillamente acopladas. Los pasos a dar son:

- Supóngase arbitrariamente un valor de ω^2 mayor que el del modo fundamental, previamente obtenido por cualquier método.
- Supóngase la amplitud del movimiento X_1 de la primera masa a partir del apoyo. Conviene suponer un valor unitario. Esta amplitud supuesta es también igual al desplazamiento ΔX_1 del primer entrepiso.
- Calcúlese la fuerza cortante en el primer resorte, $V_1 = K_1 \Delta X_1$, donde K_1 es la rigidez de entrepiso, y la fuerza de inercia en la primera masa, $F_1 = M_1 \omega^2 X_1$.
- Por equilibrio determínese la fuerza cortante en el segundo resorte $F_2 = V_1 - F_1$.
- Obténgase la deformación de este último $\Delta X_2 = F_2 / K_2$.
- Calcúlese la amplitud del desplazamiento de la segunda masa, $X_2 = X_1 + \Delta X_2$, y la fuerza de inercia de la misma $F_2 = M_2 \omega^2 X_2$.
- Repítanse los pasos (d) a (f) con el tercer resorte y con la tercer masa.
- Continúese el proceso hasta llegar a la última masa. Si se satisface el equilibrio entre la fuerza de cortante del último resorte y la fuerza de inercia de la masa aludida, la frecuencia escogida y las amplitudes calculadas corresponden a un modo natural de vibración. Por lo general, tales fuerzas no son iguales y su diferencia constituye un residuo.

Representado en una gráfica los residuos contra los distintos valores de ω^2 supuestos, se obtendrá una curva cuyos ceros corresponden a las frecuencias naturales. Un cambio de signo en los residuos correspondientes a dos valores de ω^2 indica que hay una frecuencia comprendida en ese intervalo de valores y podemos interpolar, por ejemplo linealmente, para lograr una mejor aproximación a la frecuencia buscada.

Cuando se está probando un valor de X suficientemente próximo al correspondiente a un modo de vibrar (cuando el residuo es pequeño), se encuentra que una aproximación más precisa de dicha frecuencia es (Crandall y Strang, 1957).

$$\omega^2 = \frac{\sum_i V_i \Delta X_i}{\sum_i F_i X_i} \quad (2.31)$$

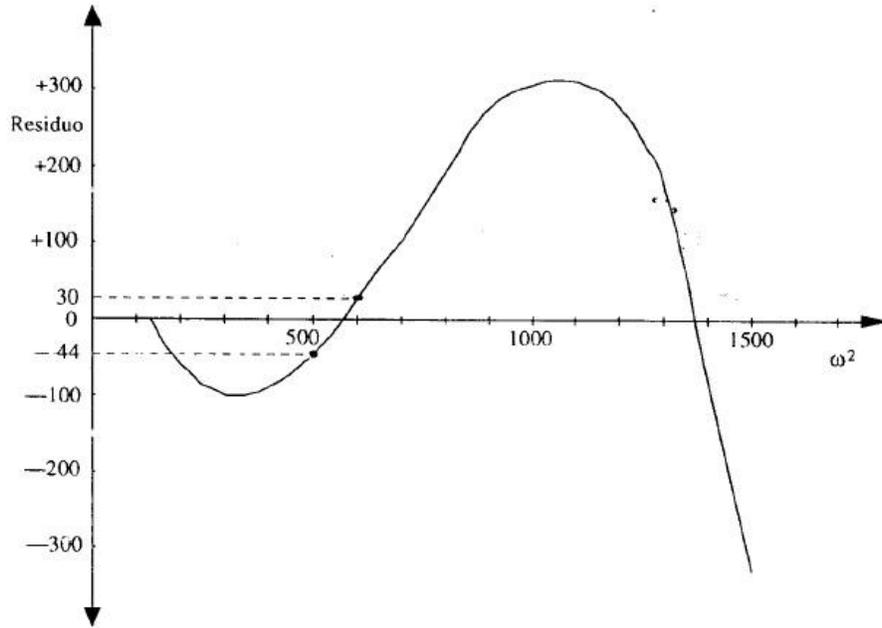


Figura 2.9 Método de Holzer

La tabla 2.3 resume los cálculos hechos para el segundo modo del edificio de la figura 2.7. Las operaciones se han hecho con mayor precisión en el último ciclo, y los resultados finales, $\omega_2^2 = 562.5/seg^2$, y de forma modal (1.000,0.85,-1.964).

La grafica de los residuos versus ω^2 se muestra en la figura 2.9, la cual incluye también puntos correspondientes a la frecuencia del tercer modo de vibrar. El valor para $\omega_3^2 = 1372/seg^2$.

Tabla 2.3 Método de Holzer

ω^2 Supuesta	K (tor/cm.)	200		200		80		Residuo
								
	M ($\frac{ton \cdot seg^2}{cm}$)		0.408		0.408		0.204	
500	X ΔX V F	1.000 200.0	1.0000 204.0	-0.020 -4.00	0.98 200.0	-2.550 -204.0	-1.570 -160	-1.1
600	X ΔX V F	1.000 200.0	1.000 245.0	-0.220 -45.00	0.780 191.0	-2.950 -236.0	-2.170 -266.0	30
560	X ΔX V F	1.000 200.0	1.000 228.5	-0.140 -28.50	-0.860 195.5	-2.810 -225	-1.950 -223	-2.0
563	X ΔX V F	1.000 200.0	1.000 229.7	-0.149 -29.70	0.851 195.5	-2.815 -225.2	-1.964 -225.6	0.4

$$(500 \times 300 + 600 \times 44) / 74 = 560 \text{ (interpolación lineal)}$$

$$\overline{\omega^2} = 560 \times \frac{200 \times 1 + 28.5 \times 0.140 + 225.0 \times 2.810}{228.5 \times 1 + 195.5 \times 0.860 + 222.0 \times 1.950} = 562.0 \quad (\text{ec. 2.31})$$

$$\overline{\omega^2} = 563 \times \frac{200 \times 1 + 29.7 \times 0.149 + 225.2 \times 2.815}{229.7 \times 1 + 195.5 \times 0.851 + 225.6 \times 1.964} = 562.5 \quad (\text{ec. 2.31})$$

1.9. Respuesta a temblores de sistemas sin torsión

Cuando una estructura elástica de varios grados de libertad como la que se muestra en la figura 2.6 está sujeta al movimiento prescrito de su base es decir a un acelerograma dado $s(t)$, sus masas sufren desplazamientos que dependen del tiempo y de la aceleración basal y pueden calcularse resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales 2.20. A partir de los

desplazamientos se pueden determinar las fuerzas actuantes en los diferentes componentes de la estructura.

1.10. Análisis modal

El llamado análisis modal aprovecha las propiedades de los modos de vibración descritos para reducir el problema de resolver un sistema acoplado de n ecuaciones diferenciales desacopladas. El concepto fundamental es que en un instante dado, los desplazamientos de las masas de sistema de varios grados de libertad pueden expresarse como la suma de los desplazamientos debidos a la participación de cada uno de los modos naturales, puesto que los mismos constituyen un conjunto completo; esto es:

$$u(t) = \sum Y_j(t)Z_j \quad (2.36)$$

O en términos completamente matriciales:

$$u(t) = ZY(t) \quad (2.37)$$

En las expresiones anteriores:

$u(t)$ = Vector de desplazamientos relativos a la base de las masas en el instante t .

$Y_j(t)$ = función escalar que expresa la variación con respecto al tiempo de la participación del modo j .

$Y(t)$ = vector columna cuyos elementos son las $Y_j(t)$.

Z_j = j – ésimo vector modal en el que el termino Z_{ij} es amplitud de desplazamiento de la masa m_i

Z = matriz modal cuya j – ésima columna es el modo Z_j

\sum Expresa suma sobre todos los modos de vibrar.

Sustituyendo $u(t)$ en la ecuación 2.20 obtenemos:

$$MZ\ddot{Y}(t) + CZ\dot{Y}(t) + KZY(t) = -M1\ddot{s}(t) \quad (2.38)$$

Recordando que gracias a las propiedades de ortogonalidad de los modos se tiene:

$$\begin{aligned} Z^T M Z &= M^* \\ Z^T K Z &= K^* \end{aligned}$$

Donde las matrices transformadas \mathbf{M}^* y \mathbf{K}^* son diagonales. Consideramos además que la matriz de amortiguamientos \mathbf{C} , se diagonaliza bajo la misma transformación modal, o sea que $\mathbf{Z}^T \mathbf{ZC} = \mathbf{C}^*$, siendo \mathbf{C}^* también diagonal. Premultiplicando ambos miembros de 2.38 por \mathbf{Z}^T nos queda:

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{K}^* \mathbf{Y}(t) = -\mathbf{Z}^T \mathbf{M} \mathbf{1} \ddot{s}(t) \quad (2.39)$$

Como los términos fuera de la diagonal de las matrices transformadas son nulos, la fila j del sistema de ecuaciones diferenciales 2.39 resulta:

$$m_j^* \ddot{Y}_j(t) + c_j^* \dot{Y}_j(t) + k_j^* Y_j(t) = -\mathbf{Z}_j^T \mathbf{M} \mathbf{1} \ddot{s}(t) \quad (2.40)$$

m_j^* , c_j^* y k_j^* Se llaman masa, amortiguamiento y rigidez generalizados en el modo j , y están dadas por:

$$\begin{aligned} m_j^* &= \mathbf{Z}_j^T \mathbf{M} \mathbf{Z} \\ c_j^* &= \mathbf{Z}_j^T \mathbf{C} \mathbf{Z} \\ k_j^* &= \mathbf{Z}_j^T \mathbf{K} \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Dividiendo 2.40 entre m_j^* y definiendo $\omega_j = \sqrt{k_j^*/m_j^*}$, $c_{crj} = 2\sqrt{k_j^* m_j^*}$ y $\xi_j = c_j^*/c_{crj}$ obtenemos:

$$\ddot{Y}_j(t) + 2\omega_j \xi_j \dot{Y}_j(t) + \omega_j^2 Y_j(t) = -[\mathbf{Z}_j^T \mathbf{M} \mathbf{1}/m_j^*] \ddot{s}(t) \quad (2.42)$$

Es de interés comparar 2.42 con la ecuación 2.2 derivada para un sistema de un grado de libertad, que repetimos a continuación:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{s}(t)$$

Como se trata de ecuaciones diferenciales lineales, de esta comparación se desprende que, para el mismo acelerograma $s(t)$, $Y_j(t)$ es igual al desplazamiento de la masa de un sistema simple de un grado de libertad con frecuencia $\omega = \omega_j$ y fracción de amortiguamiento crítico $\xi = \xi_j$ multiplicado por el siguiente factor:

$$p_j = \frac{\mathbf{Z}_j^T \mathbf{M} \mathbf{1}}{\mathbf{Z}_j^T \mathbf{M} \mathbf{Z}_{ij}^2}$$

En términos de cantidades escalares p_j se expresa en:

$$p_j = \frac{\sum_i m_i z_{ij}}{\sum_i m_i z_{ij}^2}$$

p_j se denomina coeficiente de participación del modo j y define a la escala a la que interviene este modo en el movimiento. Supongamos que el desplazamiento del sistema de un grado de libertad con frecuencia ω_j y fracción de amortiguamiento crítico ξ_j ante la excitación $s(t)$ es $\phi_j(t)$, entonces $Y_j(t) = p_j \phi_j(t)$. Sustituyendo en la ecuación 2.36 y limitándonos al desplazamiento de la n -ésima masa, inferimos:

$$u_{nj}(t) = Y_j(t)z_{ij} \quad (2.45)$$

$$u_{nj}(t) = \sum u_{nj}(t) = \sum Y_j(t)z_{nj} = \sum p_j \phi_j(t)z_{nj} \quad (2.46)$$

o también:

$$u_{nj}(t) = \sum_j \phi_j(t)z_{nj} \frac{\sum_i m_i z_{ij}}{\sum_i m_i z_{ij}^2} \quad (2.47)$$

Esta última igualdad muestra que, en el instante t , el desplazamiento relativo de la masa n debido a la contribución del modo j se obtiene como el producto de la amplitud de dicha masa en el modo aludido a una escala arbitraria, por el coeficiente de participación p_j , y por una función del tiempo $\phi_j(t)$, que es la misma que proporciona el desplazamiento relativo de la masa de un sistema de un grado de libertad de igual periodo y amortiguamiento que los del modo en cuestión. La función $\phi_j(t)$ puede calcularse con cualquier método analítico o numérico y tiene unidades de longitud.

1.11. Modos ortonormales

El que los modos puedan tener una escala arbitraria significa que podemos multiplicar todos los elementos de cualquier vector modal \mathbf{Z}_j por una constante sin afectar ninguna otra de las propiedades modales. En particular, en la ecuación 2.47 el valor de $u_n(t)$ es independiente de la escala que se adopte para los z_{ij} puesto que si los mismos se multiplican por un factor arbitrario a , aparecerá a^2 en él un numerador y en el denominador, sin alterar el resultado final.

Es muy conveniente, sin embargo, escalar los modos de manera que todas las masas generalizadas m_j^* sean iguales a la unidad. Se dice entonces que los modos se han normalizado con respecto a la matriz de masas o que son ortonormales. Supongamos que conocemos el modo \mathbf{Z}_j en una escala cualquiera que lleva en general a $m_j^* = \mathbf{Z}_j^T \mathbf{M} \mathbf{Z}_j \neq 1$.

Para obtener el modo ortonormal debemos dividir \mathbf{Z}_j por $\sqrt{m_j^*}$; hecha tal operación, de 2.41 deducimos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_j^T \mathbf{M} \mathbf{Z}_j &= \mathbf{1} \\ \mathbf{Z}_j^T \mathbf{C} \mathbf{Z}_j &= 2\omega_2 \xi_j \\ \mathbf{Z}_j^T \mathbf{K} \mathbf{Z}_j &= \omega_j^2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Las fórmulas para el factor de participación se simplifican a:

$$p_j = \mathbf{Z}_j^T \mathbf{M} \mathbf{1} = \sum m_j z_{ij} \quad (2.49)$$

La fuerza de inercia de la masa n vibrando en el modo j es el producto de la masa por la aceleración correspondiente, es decir $m_n u_{nj}$, donde, según 2.45 a 2.47,

$$\ddot{u}_{nj}(t) = \ddot{Y}_j z_{nj} = p_j \phi_j(t) z_{nj} \quad (2.50)$$

La cortante en la base V_j , en este método es la suma de las fuerzas en todas las masas:

$$V_j = \sum_n m_n p_j \phi_j(t) z_{nj} = p_j \phi_j(t) \sum_n m_n z_{nj}$$

Puesto que la última suma es igual al factor de participación del j –ésimo modo, se llega a:

$$V_j = p_j^2 \phi_j(t)$$

Teniendo presente que $\phi_j(t)$ tiene unidades de aceleración inferimos que p_j^2 tiene unidades de masa; por ello se llama masa efectiva del modo j . La adición de las masas efectivas es igual a la suma de las masas del sistema; entonces el cuadrado del coeficiente de participación del modo ortonormal j representa la parte de la masa total que genera cortante en la base de dicho modo.

2. Fuentes de la programación

2.1. Programa principal

El siguiente código puede ser incorporado a cualquier versión de MATLAB y operara siempre y cuando este en la misma carpeta de trabajo el archivo Dinprop.txt y ace1.txt.

Las líneas que inician con % son comentarios, y el compilador no los tomará en cuenta.

```
% Programa de SMGDL
```

```
clear, clc
```

```
% fprintf ' Están los datos del acelerograma en "ace1.txt" \n'
```

```
% fprintf ' y las propiedades de la Estructura en Dinprop.txt? s o n? \n'
```

```
% ace = input(' ','s')
% if ace == 's' || 'S'
% tic
```

% Las líneas están comentadas ya que en la programación final, no intervienen, y las respuestas esperadas se obvian en la interfaz.

```
%% ACELEROGRAMA
```

```
load ace1.txt
Xs = ace1(:,1);
Npts = length(Xs);
```

```
%% PROPIEDADES DINÁMICAS DE LA ESTRUCTURA
```

```
load Dinprop.txt
Tdelta = Dinprop(1,4); % Intervalo de Tiempo
Tini = Dinprop(1,5); % Tiempo Inicial
Te = Dinprop(1,6); % Periodo Natural de Vibración
Me = diag(Dinprop(:,1)); % Matriz de Masas
K = Dinprop(:,2); % Rigideces de la Estructura
Am = diag(Dinprop(:,3)); % Relación de Amortiguamiento
```

```
NGDL = length(Me);
t = (Tini:Npts-1)*Tdelta;
```

```
for i=1:NGDL-1
Ke(i,i) = K(i) + K(i+1);
Ke(i,i+1)=-K(i+1);
Ke(i+1,i)=-K(i+1);
end
Ke(NGDL,NGDL) = K(NGDL);
```

```
[Mv,Wo2] = eig(Ke,Me); % Frecuencias y Modos de Vibrar
Wo = sqrt(Wo2)
Md=Mv
```

```
% Modos de Vibrar
```

```
PU = 1;
for i=1:NGDL
for j=1:NGDL
Mdv(j,i) = Mv(j,i)/Mv(PU,i);
end
```

```

end
Mdv

figure('Position',[75 250 500 350])

subplot(151)
Nivel = 0:1:NGDL;
plot([0;Mdv(:,1)],Nivel,'bp-','LineWidth',1.5)
title('Modo 1')
grid, ylabel('Nivel')
subplot(152)
plot([0;Mdv(:,2)],Nivel,'gp-','LineWidth',1.5)
title('Modo 2')
grid, ylabel('Nivel')
subplot(153)
plot([0;Mdv(:,3)],Nivel,'rp-','LineWidth',1.5)
title('Modo 3')
grid, ylabel('Nivel')
subplot(154)
plot([0;Mdv(:,4)],Nivel,'rp-','LineWidth',1.5)
title('Modo 4')
grid, ylabel('Nivel')
subplot(155)
plot([0;Mdv(:,5)],Nivel,'rp-','LineWidth',1.5)
title('Modo 5')
grid, ylabel('Nivel')

% figure('Position',[800 160 500 450])

Mdt = Md';

for i=1:NGDL
    Te(i,i) = 2*pi / Wo(i,i);
end
Te

%% Matrices Generalizadas

Mg = Mdt*Me*Md
Kg = Mdt*Ke*Md

Wcomp = sqrt(Kg/Mg)

%% Amortiguamiento (Método de RAYLEIGHT)

```

$$a0 = 2 * Am(1,1) * Wo(1,1) * Wo(3,3) / (Wo(1,1) + Wo(3,3))$$

$$a1 = 2 * Am(3,3) / (Wo(1,1) + Wo(3,3))$$

$$Am1 = (a0 / (2 * Wo(1,1))) + (a1 * Wo(1,1) / 2)$$

$$Am3 = (a0 / (2 * Wo(3,3))) + (a1 * Wo(3,3) / 2)$$

$$Cam = a0 * Me + a1 * Ke$$

$$Cg = Mdt * Cam * Md$$

for j=1:NGDL

$$Am(j,j) = (Cg(j,j) / (2 * Wo(j,j) * Mg(j,j)));$$

end

%% Factor de Participación Modal

$$Fpm = \text{sum}(Me * Md) / \text{sum}(Me * (Md.^2))$$

%% APLICANDO FFT

$$Wdelta = 1 / (Npts * Tdelta); \quad \% \text{ Incremento de Frecuencia}$$

$$f = (0:Wdelta:(Npts-1)*Wdelta);$$

$$Ww = 2 * pi * f; \quad \% \text{ OMEGA}$$

$$img = \text{sqrt}(-1);$$

for j=1:NGDL

$$Ft = -Fpm(j) * Xs; \quad \% \text{ Fuerza en el dominio del Tiempo}$$

$$Fw = \text{fft}(Ft); \quad \% \text{ Fuerza en el Dominio de la Frecuencia}$$

$$r = Ww ./ Wo(j,j); \quad \% \text{ Relación de Frecuencias}$$

% Función de Transferencia

$$Hh = 1 ./ (Kg(j,j) * ((1 - (r.^2)) + (2 * img * Am(j,j) * r)));$$

$$Zw(1) = Fw(1);$$

for k = 2:Npts/2+1

$$Zw(k) = Hh(k) * Fw(k);$$

$$nk = Npts - k + 2;$$

$$Zw(nk) = \text{conj}(Zw(k));$$

end

$$nyw = \text{abs}(Zw); \quad \% \text{ Respuesta } Z(W)\text{-Frecuencia}$$

```

Zt(1:Npts)=real(iff(Zw(1:Npts),Npts)); % Respuesta Z(t)-Tiempo

Zvt(j,:) = Zt';

end

Yt = Md*Zvt;

for j=1:NGDL
Ytmax(j,1) = max(abs(Yt(j,:)));
end

Ytmax

%% GRÁFICAS

fxw =(-Npts/2:Npts/2-1)*Wdelta;

% Graficando la aceleración sísmica (t - Xs)
% plot(t,Xs)
% title('Aceleración Sísmica Xs(t)')
% grid, xlabel('Tiempo (seg)'), ylabel('Xs(t) (gal)')
% figure

% Respuesta en el Dominio del tiempo
% plot(t,Yt)
% title('Respuesta en el Dominio del Tiempo')
% grid, xlabel('Tiempo (seg)'), ylabel('Y(t) (cm)')

%toc

% else
% fprintf ' DEBES DE TENER LOS DATOS EN ESTE ARCHIVO, EXIT!!! \n'
% end;

```

2.2.Desarrollo de la interfaz

La interfaz base para el sistema, fue creada mediante el framework de diseño visual que se incorpora en MATLAB, por ello las ligas, referencias de botones u objetos, llamadas a funciones y otras operaciones, se encuentran en inglés ya que por default vincula lo creado

en la ventana de diseño visual a un código con terminación *.m mismo que se muestra a continuación.

El nombre del archivo de la interfaz es “*PRUEBAS.m*” y la descripción de las llamadas a función y los regresos de parámetros en las mismas se comenta en cada etapa.

%% Descripción inicial de la interfaz.

```
function varargout = pruebas(varargin)
% PRUEBAS M-file for pruebas.fig
% PRUEBAS, by itself, creates a new PRUEBAS or raises the existing
% singleton*.
%
% H = PRUEBAS returns the handle to a new PRUEBAS or the handle to
% the existing singleton*.
%
% PRUEBAS('CALLBACK',hObject,eventData,handles,...) calls the local
% function named CALLBACK in PRUEBAS.M with the given input arguments.
%
% PRUEBAS('Property','Value',...) creates a new PRUEBAS or raises the
% existing singleton*. Starting from the left, property value pairs are
% applied to the GUI before pruebas_OpeningFcn gets called. An
% unrecognized property name or invalid value makes property application
% stop. All inputs are passed to pruebas_OpeningFcn via varargin.
%
% *See GUI Options on GUIDE's Tools menu. Choose "GUI allows only one
% instance to run (singleton)".
%
% See also: GUIDE, GUIDATA, GUIHANDLES

% Edit the above text to modify the response to help pruebas

% Last Modified by GUIDE v2.5 06-Mar-2011 14:43:07

% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',    mfilename, ...
                  'gui_Singleton', gui_Singleton, ...
                  'gui_OpeningFcn', @pruebas_OpeningFcn, ...
                  'gui_OutputFcn', @pruebas_OutputFcn, ...
                  'gui_LayoutFcn', [] , ...
                  'gui_Callback', []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
```

end

if nargin

[varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});

else

gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});

end

% End initialization code - DO NOT EDIT

%% Etapa de creación de entorno o fondo de la interfaz, se configure aquí el orden y aparición de las ventanas.

% --- Executes just before pruebas is made visible.

function pruebas_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)

% This function has no output args, see OutputFcn.

% hObject handle to figure

% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB

% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% varargin command line arguments to pruebas (see VARARGIN)

% Choose default command line output for pruebas

handles.output = hObject;

% Update handles structure

guidata(hObject, handles);

% UIWAIT makes pruebas wait for user response (see UIRESUME)

% uiwait(handles.figure2);

% --- Outputs from this function are returned to the command line.

function varargout = pruebas_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)

% varargout cell array for returning output args (see VARARGOUT);

% hObject handle to figure

% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB

% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Get default command line output from handles structure

varargout{1} = handles.output;

% --- Executes on button press in pushbutton1.

function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)

% hObject handle to pushbutton1 (see GCBO)

```

% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
display Adios
close(handles.figure2);

%% Termina la etapa de operaciones del entorno general. Los botones y pestañas se
configuran a partir de las siguientes líneas.

function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit1 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit1 as a double

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Acciones que se ejecutarán al oprimir el botón 2
% La descripción de los objetos, y demás parámetros se especifican en cada función que se
crea, pero para efectos de resumir, se dejará a la vista solo la primera y los restantes se
omitirán

function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to pushbutton2 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
%
% a = inputdlg({Nombre},'dame el dato')
%
% nombre = a{1}

```

```

% set(handles.text1,'nombre')

% --- Executes on button press in pushbutton2.
function pushbutton3_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to pushbutton3 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% -----
function analizar_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to analizar (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% -----Función para abrir el archive de los datos de entrada
function Untitled_1_Callback(hObject, eventdata, handles)
winopen ('Dinprop.txt')
% -----Controla las formas de las pestañas en cascada.
function Untitled_2_Callback(hObject, eventdata, handles)

% -----
function Untitled_5_Callback(hObject, eventdata, handles)

% -----Lanza la aplicación del análisis, y su revisión por etapas.
function Untitled_4_Callback(hObject, eventdata, handles)
Principal_SMGDL_SEJE
Principal_SMGDL

%% -----Controla las formas de las pestañas en cascada.

function Untitled_6_Callback(hObject, eventdata, handles)
% -----
function Untitled_7_Callback(hObject, eventdata, handles)

% ----Cada función hace una llamada al cálculo de la respuesta por entrepiso de aquí su
nombre : SMGDL_R. (Sistema de multiples grados de libertad –Respuesta)
function Untitled_14_Callback(hObject, eventdata, handles)
Principal_SMGDL_R1
function Untitled_15_Callback(hObject, eventdata, handles)
Principal_SMGDL_R2
function Untitled_16_Callback(hObject, eventdata, handles)
Principal_SMGDL_R3
function Untitled_17_Callback(hObject, eventdata, handles)

```

Principal_SMGDL_R4

`function` Untitled_18_Callback(hObject, eventdata, handles)

Principal_SMGDL_R5

% ----Cada función hace una llamada al cálculo del modo de vibrar, de aquí su nombre :
SMGDL_M. (Sistema de múltiples grados de libertad –Modos)

`function` Untitled_8_Callback(hObject, eventdata, handles)

Principal_SMGDL_M1

`function` Untitled_10_Callback(hObject, eventdata, handles)

Principal_SMGDL_M2

`function` Untitled_11_Callback(hObject, eventdata, handles)

Principal_SMGDL_M3

`function` Untitled_12_Callback(hObject, eventdata, handles)

Principal_SMGDL_M4

`function` Untitled_13_Callback(hObject, eventdata, handles)

Principal_SMGDL_M5

`function` Untitled_19_Callback(hObject, eventdata, handles)

%% -----Controla las formas de las pestañas en cascada.

`function` Untitled_20_Callback(hObject, eventdata, handles)

`function` Untitled_21_Callback(hObject, eventdata, handles)

`function` Untitled_22_Callback(hObject, eventdata, handles)

% -----Hace llamada a la función que grafica el acelerograma del sismo.

`function` Untitled_23_Callback(hObject, eventdata, handles)

Grafica_sismo