

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Licenciatura en Ingeniería en Computación

Proyecto Tecnológico

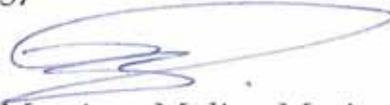
Diseño e implementación de un modelo que describa la dinámica de un incendio forestal a través de un autómata celular y diagramas de Voronoi



Rincón Benavides David
Matrícula: 2143032457



M. en C. Téllez Castillo Germán



Dr. Martínez Molina Mario

Trimestre 2018 Otoño

17 de diciembre de 2018

Declaratoria

Nosotros, Téllez Castillo Germán y Martínez Molina Mario, declaramos que aprobamos el contenido del presente Reporte de Proyecto de Integración y damos nuestra autorización para su publicación en la Biblioteca Digital, así como en el Repositorio Institucional de UAM Azcapotzalco.



M. en C. Téllez Castillo Germán



Dr. Martínez Molina Mario

Yo, Rincón Benavides David, doy mi autorización a la Coordinación de Servicios de Información de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, para publicar el presente documento en la Biblioteca Digital, así como en el Repositorio Institucional de UAM Azcapotzalco.



Rincón Benavides David

Resumen

En este proyecto se realizó la modelación de un incendio forestal haciendo uso de un autómata celular de Voronoi.

En el presente proyecto se trata de describir la dinámica de un incendio forestal por medio de ecuaciones que modelan factores como la velocidad del viento, la elevación del terreno y la probabilidad de propagación del fuego. Todo esto con el objetivo de describir la dinámica espacial y temporal de un incendio forestal. También se hace uso de los diagramas de Voronoi para la generación de la *lattice* del autómata con el motivo de experimentar como es que una *lattice* con teselación irregular afecta la dinámica del modelo.

Los resultados presentados describen adecuadamente como el incendio se comporta en una zona tomando en cuenta estos factores. Así mismo el modelo es capaz de expandirse agregando mas factores como el tipo y la densidad de la vegetación de la zona, entre otros.

Índice

Resumen	1
Introducción	4
Antecedentes	5
Justificación	7
Objetivos	7
Objetivo General	8
Objetivos Específicos	8
Marco Teórico	8
4.1. Autómatas Celulares	8
4.1.1. Condiciones de Frontera	9
4.1.2. Tipos de Vecindades	10
4.1.3. Game of Life	10
4.2. Diagramas de Voronoi	11
4.2.1. Algoritmo de Fortune	12
Desarrollo del Proyecto	15
Resultados	20
4.3. Tasa de Propagación del Fuego (P_h)	21
4.4. Velocidad del Viento (P_w)	25
4.5. Elevación del Terreno (P_s)	28
Conclusiones	32
Trabajo a Futuro	32

Índice de figuras

1.	Evento de Sitio.	13
2.	Instante antes de que se de el evento de circulo.	14
3.	Evento de circulo.	14
4.	Imagen con datos de elevación en escala de grises.[1]	17
5.	Lattice del autómeta celular con el factor de tasa de propagación.	21
6.	Gráfica general de tasa de propagación.	22
7.	Comportamiento de la combustión en la simulación.	23
8.	Interacción de los módulos y etapas propuestas.	23
9.	Gráfica general de tasa de propagación para un valor de constante menor.	24
10.	Gráfica general de tasa de propagación.	24
11.	Gráfica de simulación de propagación de un incendio	25
12.	Lattice de simulación de velocidad del viento	26
13.	Fragmento de simulación de la velocidad del viento.	26
14.	Gráfica del estado completo de la lattice a través de la simulación.	27
15.	Gráfica de la propagación de fuego tomando en cuenta la velocidad del viento.	28
16.	Lattice de la simulación que toma en cuenta la elevación del terreno.	29
17.	Gráfica del estado de la lattice tomando en cuenta la velocidad del viento.	29
18.	Gráfica de la propagación de fuego tomando en cuenta la elevación del terreno.	30
19.	Lattice de la simulación que toma en cuenta todos los factores.	30
20.	Gráfica de la configuración de la lattice tomando en cuenta todos los factores.	31
21.	Gráfica de la propagación de fuego tomando en cuenta todos los factores.	31

Introducción

Debido al impacto que un incendio forestal tiene en la conservación de los ecosistemas, así como en la infraestructura y actividades humanas, es necesario entender de manera adecuada el comportamiento de estos fenómenos. Para lograr lo anterior se requiere no solo modelar su dinámica temporal, sino también su dinámica espacial. Una herramienta matemática capaz de lograr lo anterior son los autómatas celulares.

Un autómata celular es un sistema dinámico discreto en tiempo y espacio, que consiste en una teselación regular del espacio, conocida como *lattice*, en donde a cada elemento se le da el nombre de célula. En cada paso de tiempo el estado de una célula depende de los estados de sus células vecinas y de su propio estado. Para determinar su nuevo estado una célula utiliza una función de transición local. Todas las células cambian su estado de manera síncrona. Este proceso se repite en pasos discretos de tiempo.

En trabajos anteriores donde la dinámica de un incendio forestal ha sido modelada a través de autómatas celulares generalmente se hace uso de una *lattice* regular. Lo anterior debido a que simular estos modelos resulta menos complejo. Para adaptar la topografía del terreno a una *lattice* regular se divide su área en subregiones idénticas cada una de las cuales corresponde a una célula. Sin embargo, el proceso anterior es deficiente debido a la irregularidad del terreno. En este proyecto se abordará dicho problema haciendo uso de un autómata celular con una *lattice* irregular.

Para crear una *lattice* irregular se hace uso de los diagramas de Voronoi, los cuales son estructuras que se forman al dividir la *lattice* en un conjunto de regiones alrededor de un punto de control en el espacio, a estas regiones se les conoce como regiones de Voronoi. Si existe un punto dentro de una región de Voronoi, dicho punto estará más cerca del punto de control asociado que de ningún otro punto de control en la *lattice*.

En este proyecto terminal se diseñará un modelo que describa la dinámica espacial y temporal de un incendio forestal a partir de un autómata celular que utiliza un diagrama de Voronoi como *lattice*.

Antecedentes

Existen una gran diversidad de trabajos que han aportado al estudio de la propagación de incendios forestales haciendo uso de autómatas celulares. Así mismo se han utilizado los autómatas celulares para describir otro tipo de problemas que siguen los mismos principios básicos. Algunos de los trabajos que aportaron a la realización de este proyecto se presentan a continuación.

En [2] se presenta un modelo que describe la dinámica de propagación de incendios forestales en un terreno montañoso usando un autómata celular. Dicho modelo toma en cuenta factores como la velocidad del viento, el tipo y densidad de la vegetación, elevación del terreno y el efecto de manchado.

Para modelar estas variables en este artículo se utilizan las ecuaciones de Rothermel, las cuales son ecuaciones dinámicas que caracterizan la velocidad máxima de propagación del fuego. Los autores mencionan que el uso de un autómata celular para la modelación de incendios forestales es muy adecuado debido a que permite predecir la propagación de un incendio, así mismo menciona que es fácilmente adaptar las condiciones de una zona y agregar factores que puedan afectar, haciendo que el modelo sea más realista.

En este trabajo también toma en cuenta dentro de su autómata celular un conjunto de estados que permite modelar la existencia de combustibles después de haber sido incendiada una célula.

La *lattice* utilizada en este modelo consiste en una teselación regular rectangular, pero los autores afirman que anteriormente se han demostrado resultados más precisos usando una teselación hexagonal.

Por último la función de transición se modela a partir de las ecuaciones de Rothermel.

Los autores lograron obtener resultados muy parecidos al incendio que proponían modelar y afirman que la metodología propuesta es adecuada para predecir incendios forestales.

En [3] nos presentan un modelo para la descripción de incendios forestales utilizando un autómata celular con una *lattice* regular rectangular.

Este modelo hace uso de un autómata celular probabilístico para modelar la propagación del fuego como un fenómeno probabilístico. Para dicho fenómeno se utilizan ecuaciones de reacción-difusión". Así mismo se toma en cuenta un conjunto de estados que representan la intensidad con la que se está incendiando una zona. Se compone de múltiples estados para expresar los incendios forestales con mayor precisión, donde las intensidades de los incendios se expresan mediante múltiples estados y las probabilidades de que la propagación del incendio dependan de los estados de las células.

Los autores proponen derivar la probabilidad crítica de que el fuego se propague

infinitamente, para realizar esto hacen uso de la aproximación de campo medio y la teoría de percolación.

En este trabajo se calculó la probabilidad crítica de 3 de los estados que se propusieron, así como la probabilidad crítica de la percolación de un sitio.

En [4] presenta un modelo de autómata celular para la propagación del fuego que aproxima el perímetro de los frentes del fuego para que tengan una forma más elíptica. Esto lo hace a través de una modificación de las ecuaciones que define la tasa de propagación, cuyo valor se define fuera de la línea del frente para resolver el problema de optimización.

Los resultados de este trabajo se comparan con simuladores reales basados en autómatas celulares, como un simulador basado en vectores. El modelo propuesto produjo resultados equivalentes en un tiempo de cálculo muy reducido. Por último el trabajo proporciona perímetros de incendios similares a los producidos con las tecnologías Raster.

En [5] se presenta un modelo de tráfico vehicular dentro de una glorieta. Esto con el objetivo de determinar la utilidad de una glorieta.

Para lograr esto el autor hace uso de un autómata celular. La *lattice* utilizada en este trabajo consiste en una con teselación cuadrangular pero en forma de rombo, simulando una glorieta.

El conjunto de estados contiene números que definen el carril que se está transitando los automóviles.

Dicho modelo toma en cuenta distintos factores que afectaran el comportamiento en general, tales como las velocidades de los vehículos, probabilidades de distracción, cambio de carril, entrada y salida de la glorieta, entre otros factores más.

Los resultados presentados en este proyecto dictan que entre más automóviles existan transitando en la glorieta, esta comienza a congestionarse causando la disminución de la velocidad de los vehículos.

En [6] se diseña un modelo de tráfico vehicular en una ciudad y una carretera. Se simula la interacción entre los vehículos y motociclistas en el tránsito. Esto con el objetivo de mostrar el comportamiento y consecuencias de un vehículo en diferentes condiciones.

Este modelo utiliza autómatas celulares con el método clásico de tránsito vehicular aportando diferentes tipos de vehículos cada uno con sus respectivas velocidades y posición en la *lattice*. Esto con el objetivo de agregar realismo a este tipo de modelos.

En [7] se modela un autómata celular que simula el comportamiento de cierto tipo de bacterias dentro de una zona del cuerpo humano afectada para determinar las condiciones en las que se pueda contener la infección. Así mismo se menciona que el autómata realizado puede utilizarse como herramienta para realizar el conteo de antibióticos en una zona determinada del cuerpo.

Dicho trabajo utiliza un autómata celular donde utiliza una gran cantidad de estados para representar cada una de las bacterias de su interés.

Justificación

A partir del año 2014 el número de incendios forestales en México ha ido en aumento [8]. Las causas detrás de un incendio forestal son diversas, no obstante un incendio forestal tiene el potencial de afectar a un gran número de personas, ecosistemas y recursos que pudieran existir en la zona afectada. Además de un número importante de efectos adversos como la pérdida de suelo [9], contaminación [9], entre otros. En consecuencia es de suma importancia entender el comportamiento de un incendio forestal de manera que se puedan tomar medidas que permitan reducir o evitar la propagación de dichos incendios. La modelación de la dinámica de un incendio forestal parte de la idea de tomar en cuenta todos los factores que se consideren más relevantes para el modelo que es planteado. Por ejemplo tomar en cuenta la velocidad y dirección del viento, el tipo de vegetación, la tasa de propagación a partir de un punto inicial, entre otros. Debido a la complejidad del problema no es posible tomar en cuenta todos estos factores. Una vez que el problema es dimensionado, se considera tomar un terreno el cual será estudiado por ejemplo un bosque. Dicho terreno se considera como la *lattice* del autómata celular, las dimensiones de esta *lattice* están dadas por el tamaño del área a estudiar. Una vez definida el área que se va a modelar, esta se divide en un conjunto de subregiones dentro de una matriz. El conjunto de dichas regiones puede ser representado haciendo uso de un autómata celular de dos dimensiones, donde cada una de las subregiones es considerada como una célula. Una vez definida la *lattice*, es necesario definir el conjunto de estados para cada célula. Para lograr esto se deben considerar aquellos factores ambientales que afectan la propagación del incendio, por ejemplo la velocidad del viento, el tipo de vegetación, la topografía del terreno, etc. Esta información formara parte del estado de una célula. A continuación se debe definir una función de transición que determine el estado de una célula en cada paso del tiempo. El estado de una célula depende de su propio estado y del estado que guardan sus vecinos [10].

En la actualidad existen modelos [3] [2] que han realizado aportaciones al estudio de la dinámica de un incendio forestal. Las *lattice* utilizadas en la mayoría de estos modelos hacen uso de una geometría regular debido a que esto conlleva una menor complejidad y por ello se concentran en tomar en cuenta otros factores. Sin embargo, tomar en cuenta la topografía del terreno puede beneficiar al modelo haciendo que sea más preciso y realista, ya que se ajusta a las características del terreno que se está estudiando.

En la presente propuesta se busca tomar en cuenta este factor haciendo uso de los diagramas de Voronoi sobre el modelo hecho.

Objetivos

Objetivo General

Modelar e implementar la dinámica de un incendio forestal a través de un autómata celular de Voronoi.

Objetivos Específicos

1. Diseñar un modelo basado en autómatas celulares que describa la dinámica de un incendio forestal.
2. Diseñar e implementar un módulo para simular el modelo propuesto.
3. Diseñar e implementar un módulo para el almacenamiento de los resultados de la simulación.

Marco Teórico

4.1. Autómatas Celulares

Un autómata celular es un sistema dinámico discreto en tiempo y espacio que consiste en una retícula de celdas que cambian sus estados según los estados de sus vecinos y la función de transición. Todas las células cambian su estado simultáneamente utilizando la misma función de transición. El proceso se repite en intervalos de tiempo discretos [11].

Podemos definir de una manera formal a un autómata celular como una 4-tupla $A = (d, S, N, f)$ [11].

En donde:

- d : Se trata de la dimensión que la *lattice* del autómata toma, por ejemplo un autómata como Game of Life (ver Sección 4.1.3) es de dos dimensiones.
- S : Se refiere a un conjunto de valores finitos que las células del autómata celular pueden tomar como estado.
- N : El vector de vecindad d -dimensional de tamaño m es una tupla.

$$N = (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_m) \quad (1)$$

donde cada $\vec{n}_i \in \mathbb{Z}^2$ y $\vec{n}_i \neq \vec{n}_j$. Los elementos en \vec{n}_i especifican las posiciones relativas de los vecinos de cada celda en la *lattice*.

- f : La función de transición local de un autómata celular con conjunto de estados S y vector de vecindad de tamaño m es una función

$$f : S^m \longrightarrow S \quad (2)$$

Lo cual especifica el nuevo estado de cada célula basado en los estados de sus vecinos en el instante de tiempo $t - 1$. Si los vecinos de una célula tienen estados S_1, S_2, \dots, S_m entonces el nuevo estado de la célula en el instante de tiempo $t + 1$ será $f(S_1, S_2, \dots, S_m)$.

En un autómata celular, todas las células siguen la misma función de transición y está se aplica a todas de manera síncrona. La función de transición rige el comportamiento del autómata.

En un autómata celular se hace uso de un espacio $d - dimensional$ finito y discreto el cual lo representa una configuración a través de intervalos de tiempo discretos. Este puede ser representado por una *lattice* regular como por ejemplo una matriz, o puede ser irregular cuando se trata de un diagrama de Voronoi.

La *lattice* representará el espacio donde las células del autómata interactuarán e irán cambiando a través del tiempo según su función de transición, pero cuando hablamos de la *lattice* también hay que definir la manera en cómo se manejan las condiciones de frontera.

4.1.1. Condiciones de Frontera

Existen distintos tipos de fronteras y cada una puede utilizarse según el propósito del autómata lo requiera. Como las siguientes:

- **Frontera Abierta:** Consiste en una frontera donde fuera de ella se consideran células con un estado fijo que pertenece al conjunto de estados.
- **Frontera Reflectora:** Consiste en una condición donde las células que se encuentran fuera de la frontera, toman un estado igual a las que se encuentran dentro de la misma.
- **Sin Frontera:** Es una condición donde hace que la *lattice* vaya creciendo a través del tiempo según sea requerido.
- **Frontera Periódica:** Es una condición donde se considera que las fronteras opuestas se consideran conectadas y forman una figura toroidal.

Existen autómatas que toman en cuenta al mismo tiempo diferentes tipos de condiciones de frontera.

4.1.2. Tipos de Vecindades

Otra consideración que se debe tomar en cuenta cuando se realiza un autómata celular es el tipo de vecindad. El tipo de vecindad está ligado directamente a la dimensión del autómata y puede ser elegida de acuerdo al problema bajo estudio.

Por ejemplo, si tuviéramos un autómata celular unidimensional ($d = 1$) entonces tendríamos que elegir el tipo de vecindad dentro de $(n - 1)!$ opciones ya que a lo más una célula puede tener $n - 1$ vecinos. En otros casos como en un autómata $d - dimensional$ ($d = n$) se tendrían muchas más opciones para elegir las vecindades.

Existen dos tipos de vecindades muy usadas en autómatas celulares sobre todo en los de dos dimensiones. La primera es la vecindad de Moore $d - dimensional$ (denotada como M_r^d) consiste en:

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^d |k_i| \leq r \forall i = 1, 2, \dots, d \quad (3)$$

donde $|k| \leq r, \forall i = 1, 2, \dots, d$. La vecindad de Moore contiene $(2r + 1)^d$ elementos.

La segunda se trata de la vecindad de Vohn Neuman (denotada por V_r^d) consiste en:

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^d \sum_{i=1}^d |k_i| \leq r \quad (4)$$

Las aplicaciones clásicas de estas vecindades son las que contienen estrictamente $r = 1$.

4.1.3. Game of Life

Teniendo todos los elementos mencionados anteriormente ya podemos realizar modelos de autómatas celulares.

Un ejemplo muy sencillo de un autómata celular es Game of Life creado por John Conway en 1970.

Sea $A(d, S, N, f)$ el autómata celular de Game of Life.

- $d = 2$ formada por una *lattice* regular de tamaño d -dimensional con fronteras periódicas donde cada celda representa una célula.
- $S : 0, 1$ Cada célula toma un valor del conjunto de estados y es coloreada según su estado (0: Negro, 1: Blanco).
- $N = M_1^d$ Se define la vecindad clásica de Moore con $r = 1$.

- f : La función de transición se define de la siguiente manera.
 - Sea Q la célula de A y sea X numero de células en estado 1 en N .
 - Si $Q = 1$ y $X > 3$
 - Si $Q = 1$ y $X > 4$
 - Si $Q = 0$ y $X = 3$
 - En otros casos la célula continúa en su estado actual.

Todas las células siguen la misma función transición y todas se actualizan simultáneamente en cada paso de tiempo, lo que va cambiando las configuraciones de la *lattice* a cada instante de tiempo.

4.2. Diagramas de Voronoi

Sea $P = p_1, p_2, \dots, p_n$ un conjunto de n puntos distintos en el plano, definimos al diagrama de Voronoi de P , denotado por $Vor(P)$, como la subdivisión del plano en n celdas, una por cada punto en P , llamadas sitios. Cada sitio en P cumple la propiedad de que un punto q se encuentra dentro de la celda correspondiente a un sitio p_i si y solo si la distancia entre q y p_i es menor a la distancia entre q y p_j para cada $p_j \in P$ con $j \neq i$.

Cada celda en el diagrama de Voronoi corresponde a un sitio y lo denotamos como $V(p_i)$. Para dos puntos p y q en el plano se define la bisectriz de p y q como la bisectriz perpendicular del segmento pq . Esta divide al plano en dos semiplanos, así $V(p_i)$ es la intersección de $n - 1$ semiplanos y por lo tanto una región poligonal limitada por a lo sumo $n - 1$ vértices y como máximo $n - 1$ aristas [12]. De esta manera a $V(p_i)$ se le conoce como región de Voronoi.

Definimos formalmente a una región de Voronoi de la siguiente manera:

$$V(p_i) = \{p | d(p, p_i) \leq d(p, p_j), j \neq i, j = 1 \dots n\} \quad (5)$$

Donde: $V(p_i)$, es la región definida por el conjunto de puntos p en el espacio donde la distancia de cada p al punto de control $p_i(d(p, p_i))$ es menor o igual a la distancia de p a cualquier otro punto de control en el plano.

Para dos sitios p y q en el plano el conjunto de puntos que están estrictamente más cerca de p que de q es el semiplano abierto de p cuyo límite es la bisectriz perpendicular entre p y q , este se denota como el semiplano $h(p, q)$. Así $V(p_i)$ también está definida como la intersección de $n - 1$ semiplanos y una región poligonal convexa abierta limitada por a lo sino $n - 1$ vértices y como máximo $n - 1$ aristas [12]. El diagrama de Voronoi está conformado por un conjunto de subregiones.

Si analizamos la complejidad del $Vor(P)$, puesto que existen n sitios y cada región de Voronoi tiene como máximo $n - 1$ vértices y aristas, la complejidad del $Vor(P)$ es a lo sumo cuadrática. Para cada sitio p_i se calcula la intersección común de los semiplanos, y esto para cada región de Voronoi, lo que lleva a un algoritmo de orden cuadrático ($O(n^2 * \log n)$).

Esta complejidad se puede mejorar haciendo uso de algoritmos de barrido para la construcción del diagrama, como lo es el algoritmo de Fortune, el cual construye el diagrama en una complejidad de $O(n * \log n)$ [12].

4.2.1. Algoritmo de Fortune

El algoritmo de Fortune es el algoritmo más recomendable para construir los diagramas de Voronoi ya que proporciona la complejidad mínima que ofrece el algoritmo de divide y vencerás pero con la diferencia de que su implementación es menos compleja. Se trata de un algoritmo de barrido donde se consideran las distancias entre los sitios.

La estrategia de un algoritmo de barrido consiste en barrer con una línea imaginaria a todo el plano comenzando desde cualquier dirección, dicha línea la llamaremos línea de barrido. Mientras la línea de barrido atraviesa el plano se guarda información acerca de la estructura del diagrama de Voronoi. Una vez que la línea de barrido sobrepasa una zona del plano la información detrás de ella no cambia a menos de que se encuentre con ciertos casos especiales que se explicarán más adelante.

En la medida que se va barriendo el plano la información obtenida determinará la estructura de los sitios de Voronoi que pertenecen al diagrama.

El problema reside en que en el instante en el que un punto q es barrido no se puede asegurar que q pertenece a $V(p_i)$ y por lo tanto no se cuenta con la información necesaria para calcular el vértice de Voronoi.

Un punto q pertenece a un sitio de Voronoi si y solo si la distancia al sitio es menor a la distancia que tiene a la línea de barrido.

Si tomamos en cuenta lo anterior podemos notar que en el instante de tiempo n se cuenta con algunos puntos que cumplen con la condición anterior por lo tanto se conoce el sitio de Voronoi al que pertenece y la información de esos puntos no cambiará. El conjunto de puntos pertenecientes a un sitio de Voronoi conforme el barrido continúa se delimita por una parábola con foco en el sitio de Voronoi.

Cada uno de los sitios forma una parábola la cual se va abriendo cada que la línea de barrido se aleja más. Dichas parábolas se intersectan entre sí formando una línea delimitadora entre los puntos con la información confirmada y los que no, dicha línea es formada por los arcos parabólicos de los sitios. A esta línea la conocemos con el nombre de "beachline".

La *beachline* es una función que, para cada coordenada x , pasa por el punto más bajo de todas las parábolas. Dicha línea es x -monotona por lo cual cada línea vertical lo intersecta en exactamente un punto [12]. Los puntos de interrupción de los arcos parabólicos que conforman la *beachline* representan los bordes del diagrama de Voronoi, por lo tanto dichos puntos de ruptura conforme se continua el barrido se encargan de trazar las aristas del diagrama.

La *beachline* es capaz de cambiar su estructura conforme el barrido se lleva a cabo. Esto sucede cuando un nuevo arco parabólico aparece y se agrega a la *beachline*, también puede cambiar cuando un arco parabólico se reduce hasta un punto donde es un solo punto y por lo tanto el arco desaparece. Estos dos casos se consideran eventos de la *beachline*.

Existen dos tipos de eventos:

Evento de sitio

Este evento se da cuando la línea de barrido atraviesa un nuevo sitio. Cuando esto sucede se agrega una nueva parábola con foco en el nuevo sitio a la *beachline* (Figura 1) lo que la divide en dos arcos delimitados por las intersecciones de los arcos parabólicos que conformaban a la *beachline* con la nueva parábola generada por el evento, lo cual a su vez nos lleva a la creación de dos nuevos puntos de ruptura. Cabe resaltar que en el instante en que se da el evento la nueva parábola es degenerada. Como el barrido continúa moviéndose hacia abajo, la nueva parábola se ensancha más y más.

Como mencionamos antes al existir un evento de sitio se crean dos nuevos puntos de ruptura, y estos comienzan a trazar un nuevo borde del diagrama. En el instante en que sucede el evento ambos puntos de ruptura se encuentran juntos pero conforme el barrido continua se van moviendo en direcciones opuestas trazando el borde del diagrama.

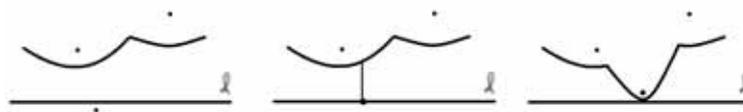


Figura 1. Evento de Sitio.

Evento circular:

Este evento se da cuando dos puntos de ruptura de la *beachline* se fusionan. El evento involucra tres sitios, conforme el barrido continua se puede apreciar como los tres sitios forman una circunferencia imaginaria (Figura 2) con centro en un mismo punto, donde las distancias de los tres sitios al centro de la circunferencia son iguales. Cuando esto sucede existe la posibilidad de que eventualmente un arco de la *beachline* desaparecerá.

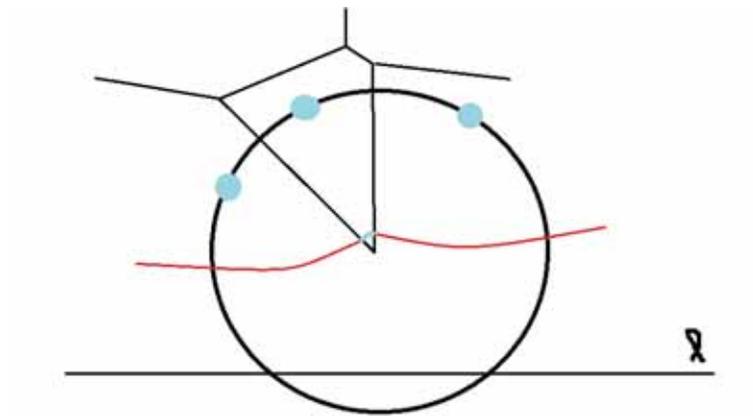


Figura 2. Instante antes de que se de el evento de círculo.

El evento sucederá cuando la línea de barrido sea tangente a la circunferencia imaginaria de los tres sitios involucrados como en la Figura 3, cuando uno de estos eventos se lleva a cabo se genera un vértice del diagrama de Voronoi.

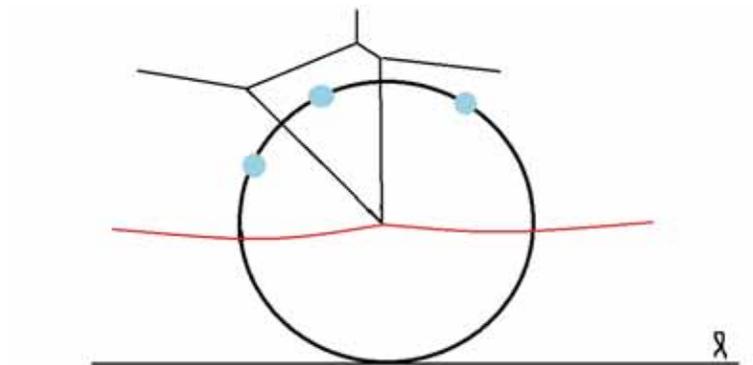


Figura 3. Evento de círculo.

Dichos eventos pueden ser almacenados en una cola de prioridad donde se ordenan respecto a sus coordenadas, así podrán ser manejados según el barrido se vaya ejecutando.

Desarrollo del Proyecto

En este proyecto se desarrolla el modelado de incendios forestales dentro de una zona. Para lograr esto hacemos uso de un autómata celular.

Sea A el autómata celular (d, S, N, f) donde:

- $d = 2$ la dimensión de la *lattice* dada por el diagrama de Voronoi denotado por $Vor(P)$ el cual define su teselación como irregular.

$Vor(P)$ divide el plano en n sitios, uno por cada sitio en el conjunto P y cada $p_i \in P$ si y solo si $dist(q, p_i) < dist(q, p_j)$ para cada $p_j \in P$ con $j \neq i$. Esta propiedad crea un conjunto de puntos por cada sitio $p_i \in P$ a los cuales se conoce como región de Voronoi denotada por $V(p_i)$, donde $V(p_i) = \{p | d(p, p_i) \leq d(p, p_j), j \neq i, j = 1 \dots n\}$.

La construcción de $Vor(P)$ se realiza de manera óptima a través del algoritmo de Fortune. Dicho algoritmo utiliza una línea imaginaria que barre el plano para poder obtener información de la zona barrida antes de que el algoritmo termine, con esta información se va construyendo $Vor(P)$.

El algoritmo de Fortune necesita cuatro elementos para poder aplicarse. El conjunto de sitios P , una cola de prioridad de eventos Q que se utilizará para manejar los posibles eventos, una estructura T la cual será la encargada de manejar la *beach-line* y una lista de aristas D que contendrá las aristas de $Vor(P)$ se realiza de la siguiente manera [12]:

procedure VORONOIDIAGRAM(P)

$Q \leftarrow P_{events}$

 ▷ Cada evento en Q está ordenada de forma descendente respecto a su coordenada y

$T \leftarrow null$

$D \leftarrow null$

$i \leftarrow 0$

while $Q \neq null$ **do**

$P = Q_i$

 ▷ Se elimina el evento tope Q_i

if $P = siteEvent$ **then**

 HandleSiteEvent(p_i)

else

 HandleCircleEvent(Y)

 ▷ Donde Y es un elemento en T el cual representa un arco del *beach-line* que desaparecerá.

$i++$

end if

end while

▷ Los elementos sobrantes en T representan aristas infinitas, estas se agregan a la lista D así como un delimitador para representar $Vor(P)$ de manera apropiada.

return D

end procedure

Como podemos observar el algoritmo de Fortune maneja dos tipos de eventos, los de sitios y los de circulo. Estos eventos transforman la *beach-line* haciendo que se modifique la manera en que se traza $Vor(P)$.

El evento de sitio se lleva a cabo cuando la *beach-line* pasa por encima de un sitio p_i , este crea una nueva parábola dentro de la *beach-line* que generará el trazo de una arista de $Vor(P)$ [12]. El evento se maneja de la siguiente manera:

procedure HANDLESITEEVENT(p_i)

if $T = null$ **then**

$T = p_i$

return

end if

▷ Se busca en T el arco k perteneciente a p_i

if $k = ptrEvent$ **then**

Remove Q_{TOP}

end if

▷ Se reemplaza p_i en T por dos nuevos puntos p_{ij} y p_{ik} , lo cual representa que cuando se agrega una nueva parábola a la *beach-line*, esta se parte en dos y los extremos de la nueva parábola se convierten en nuevos *break points*.

$D = newhalf - edge$

▷ Se agrega una nueva arista a Q por cada nuevo *breakpoint* que pertenece a $V(p_i)$ y $V(p_j)$

if p_i, p_j, p_k convergen **then**

$T = new * node$

$Q = newcircleEvent$

end if

end procedure

El evento de circulo sucede cuando tres sitios p_i, p_j, p_k convergen en un mismo punto generando una circunferencia en el punto de convergencia, esto quiere decir que eventualmente una arista de $Vor(P)$ desaparecerá y se transformará en un vértice de $Vor(P)$. Los eventos de circulo se manejan de la siguiente manera:

procedure HANDLECIRCLEEVENT(Y)

▷ Sea arc el arco de la *beach-line* que desaparecerá

$T \rightarrow DeleteNode(arc)$

```

Q → DeleteEvents(circleEvent)
D → AddVertex(arc)
▷ Determina si entre los  $p_i$  de este evento, se encuentra otro evento de circulo
if Anterior es cierto then
  Q = newcircleEvent
  T = newCircleNode
else
end if
end procedure

```

Una vez construido $Vor(P)$ implica que se cuenta con la *lattice* del autómata, pero para modelar un terreno deseado la construcción de $Vor(P)$ se tiene que asignar a partir de los datos del terreno. En el caso de este proyecto se hace la construcción de $Vor(P)$ a partir de los datos de elevación de un terreno.

Los datos se obtienen a través de una imagen (proporcionada por LP DAAC[[1]]) en formato TIF, este formato nos da los datos de elevación como una imagen en escalas de grises, entre mas clara es la imagen mas alta sera la zona, con ayuda de la biblioteca GDAL [13] se hace la lectura de dicha imagen.

Una vez obtenidos los datos se obtiene un mapeo de la elevación de cada p_i en $Vor(P)$ y se guarda como una propiedad mas de p_i . La imagen utilizada en el proyecto es la siguiente :

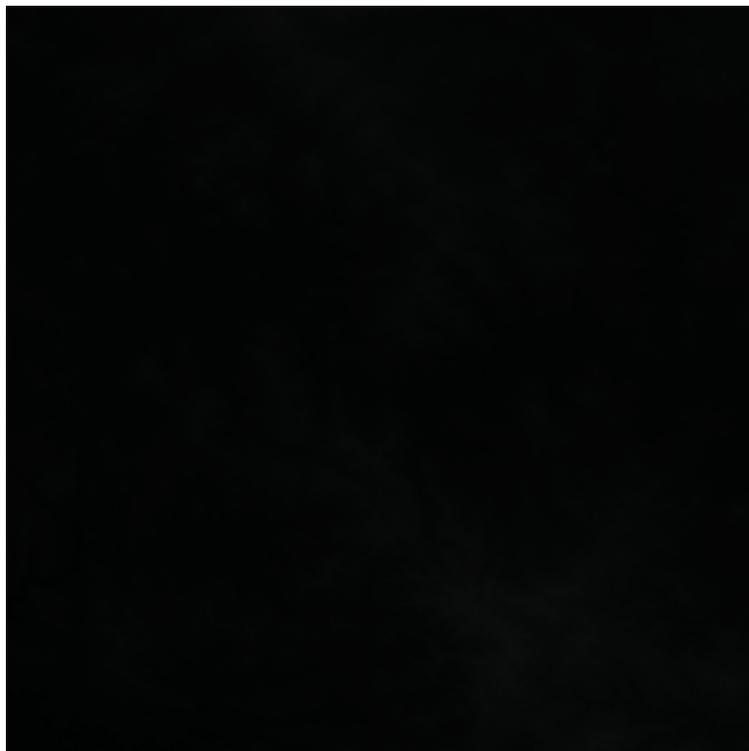


Figura 4. Imagen con datos de elevación en escala de grises.[1]

La *lattice* será adecuada respecto a los datos de elevación de la Figura 4 y sobre esta se podrá simular la dinámica del incendio.

- $S = \{0, 1, 2, 3\}$ el conjunto de estados que cada célula de A puede tomar. Los valores de estos estados representan el estado de una región de $Vor(P)$, cada estado en S representa lo siguiente:
 1. $S = 0$ representa el estado *EMPTY*
 2. $S = 1$ representa el estado *TREE*
 3. $S = 2$ representa el estado *BURNING_TREE*
 4. $S = 3$ representa el estado *BURNING_ZONE*
- N el vector de vecindad $d - dimensional$ de tamaño m $N = (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_m)$ donde para cualquier $K \subseteq \mathbb{Z}^d$ se denota como $N(K) = \{\vec{n} + \vec{n}_i \mid \vec{n} \in K \text{ and } i = 1, 2, \dots, m\}$. Los elementos en $N(K)$ especifican las posiciones relativas de los vecinos de cada celda en la *lattice*.

El hecho de tener una *lattice* con teselación irregular hace que a diferencia de un modelo con *lattice* regular la cardinalidad del vector de vecindad es distinto para cada célula en A . El vector de vecindad contiene una referencia a cada vecino de dicha célula.

- La función de transición $f : S^m \rightarrow S$ de A determina el estado de cada célula en el instante de tiempo $t + 1$. f genera una configuración de la *lattice* según las condiciones de los estados de cada célula.

En el caso de este proyecto f es el modelo que determinara el comportamiento de la dinámica de un incendio forestal, para esto se hará uso del modelo de Alexandridis. Este modelo utiliza una f probabilística que toma en cuenta diversos factores que serán usados en este proyecto como la probabilidad de la velocidad del viento, la probabilidad de la elevación del terreno, la probabilidad de propagación del fuego y otros factores como el tipo y la densidad de la vegetación.

Antes de modelar f es necesario preparar los factores que serán utilizados, el primero de ellos será la probabilidad de que el viento afecte en la propagación, para ello usaremos las ecuaciones del modelo de Alexandridis. La ecuación de la velocidad del viento es la siguiente:

$$p_w = e^{w_s * c_1} * ft \quad (6)$$

$$ft = e^{w_s * (\cos \theta - 1) * c_2} \quad (7)$$

Las ecuaciones del modelo de Alexandridis para la probabilidad del viento necesitan diversos factores; el vector de dirección del viento w_d , la velocidad del viento w_s y las constantes de Alexandridis c_1 y c_2 , así como el punto P y la lista de vecinos N . Esto se modela de la siguiente manera:

```

procedure PROBABILITYWINDFEFFECT( $w_d, w_s, c_1, c_2$ )  $P \leftarrow (0, 0)$ 
  for  $i \leftarrow 0$  to  $N$  do
    if  $N_i = 2$  then
       $P_+ = PosQ - PosN[i]$ 
    end if
  end for
   $W_{norm} = \|w_d\|$ 
   $P_{norm} = \|P\|$ 
   $cosTheta = \frac{P \bullet w_d}{W_{norm} * P_{norm}}$ 
   $ft = e^{w_s * (cosTheta - 1) * c_2}$ 
   $p_w = e^{w_s * c_1} * ft$ 
  return  $p_w$ 
end procedure

```

El otro factor que se tomo en cuenta es la probabilidad de la elevación del terreno, en este factor se toma en cuenta el ángulo entre las células, esto con el objetivo de determinar en que zonas se propaga con mas facilidad. Las ecuaciones de Alexandridis toman en cuenta una constante a y así mismo la lista de vecinos N de la célula Q . La ecuación es la siguiente:

$$l = \sqrt{Q^2 - Ni^2} \quad (8)$$

$$\theta = \arctan \frac{(Q_{ELEVATION} - N_{ELEVATION})}{l} \quad (9)$$

$$p_{s+} = e^{a * \theta} \quad (10)$$

La probabilidad de la elevación del terreno se modela de la siguiente manera:

```

procedure PROBABILITYELEVATIONEFFECT( $a$ )
   $ThetaElev \leftarrow 0$ 
   $p_s \leftarrow 0$ 
  for  $i \leftarrow 0$  to  $N$  do
     $l = \sqrt{Q^2 - Ni^2}$ 
     $ThetaElev = \arctan \frac{(Q_{ELEVATION} - N_{ELEVATION})}{l}$ 
     $p_{s+} = e^{a * ThetaElev}$ 
  end for
  return  $p_s$ 
end procedure

```

El ultimo de los factores que se toma en este modelo es la probabilidad de la propagación del fuego, se debe a la probabilidad de que una célula se incendie debido al numero de vecinos que se están incendiando. Esta probabilidad se modela de la siguiente manera:

```

procedure PROBABILITYFIREEFFECT
   $n = 0$ 
  for  $i \leftarrow 0$  to  $N$  do
    if  $N[i] = 2$  then
       $n+ = 1$ 
    end if
  end for
  return  $n/N$ 
end procedure

```

Una vez que tenemos los factores que afectaran al modelo usaremos la ecuación de Alexandrididis para modelar la función de transición. La función se trata de la siguiente:

```

procedure MODELO( $f, w_d, w_s, c_1, c_2, a$ )
   $p = rand()$ 
   $p_w = probabilityWindEffect(w_d, w_s, c_1, c_2)$ 
   $p_e = probabilityElevationEffect(a)$ 
   $p_f = probabilityFireEffect()$ 
   $p_{Burn} = f * p_w * p_e * p_f$ 
  if  $Q = EMPTY$  then
     $Q = EMPTY$ 
  end if
  if  $Q = TREE$  then
     $Q = BURNINGZONE$ 
  end if
  if  $Q = BURNINGTREE$  then
    if  $p \dot{=} p_{Burn}$  then
       $Q = TREE$ 
    end if
  end if
  if  $Q \leftarrow BURNINGZONE$  then  $Q \leftarrow BURNINGZONE$ 
  end if
end procedure

```

De esta manera modelamos la dinámica del incendio forestal. Los resultados se presentan a continuación.

Resultados

Antes de presentar los resultados es necesario tomar en cuenta las siguientes cuestiones. En los experimentos presentados se utilizó una simulación con 5000 sitios en el diagrama de Voronoi, al ser una cifra grande dicho diagrama se vuelve propenso a contener casos degenerados. Todo experimento se inicializó con un sitio en estado incendiado y aproximadamente en el centro de la *lattice*.

En este proyecto se tomaron en cuenta los factores de tasa de propagación del fuego, velocidad del viento y elevación del terreno. Para mostrar como cada factor aporta a la dinámica del modelo se mostraran los resultados individuales y por último se mostrará el resultado del modelo con todos los factores incluidos.

4.3. Tasa de Propagación del Fuego (P_h)

El primero de estos factores a analizar se trata de la tasa de propagación del fuego. Para realizar esta simulación es necesario tener una constante de propagación. Es de interés saber que sucede en que manera la constante afecta a la simulación, por lo tanto para este factor se realizaron dos experimentos. En el primero un valor de la constante de propagación igual a 2.5. Los resultados son los siguientes:

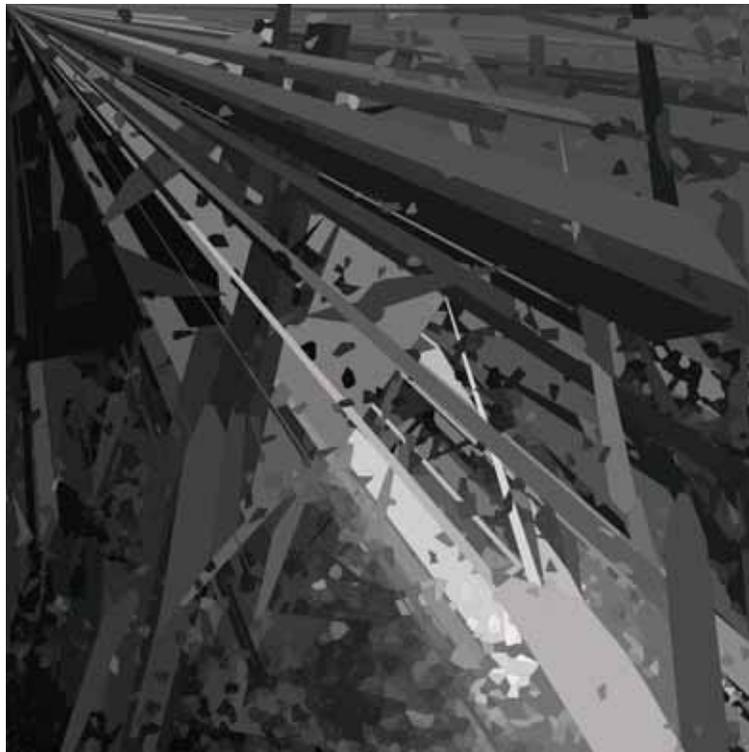


Figura 5. Lattice del autómata celular con el factor de tasa de propagación.

En la figura 5 se nos presenta la *lattice* generada por la simulación, como se menciono antes un diagrama de Voronoi con tantos sitios suele ser propenso a tener casos degenerados.



Figura 6. Gráfica general de tasa de propagación.

La figura 6 muestra una gráfica de Densidad de estados vs Tiempo. Dicha gráfica puede explicar como mientras la zona con árboles va decreciendo a cada instante de tiempo, las zonas quemadas van en aumento hasta que llega el momento en que el incendio termina, es cuando el numero de árboles y el numero de zonas quemadas se vuelve constante.

Durante cambio de estado de zonas con árboles a zonas quemadas, se puede observar como hay un lapso de tiempo en que la combustión se va realizando. Si hiciéramos un zoom como en la figura 7 podemos ver como la combustión se comporta



Figura 7. Comportamiento de la combustión en la simulación.

Como se observa en la Figura 7, al inicio de la simulación la cantidad de árboles quemados crece debido al aumento en la tasa de propagación del incendio. Dicha tasa de propagación alcanzará un máximo debido a que el número de árboles en la *lattice* es finito. A partir de este punto la tasa de propagación disminuye y en consecuencia también lo hará el número de árboles incendiados.

Esto también se puede observar en la gráfica que representa a las zonas con árboles, como la figura 8 lo muestra.

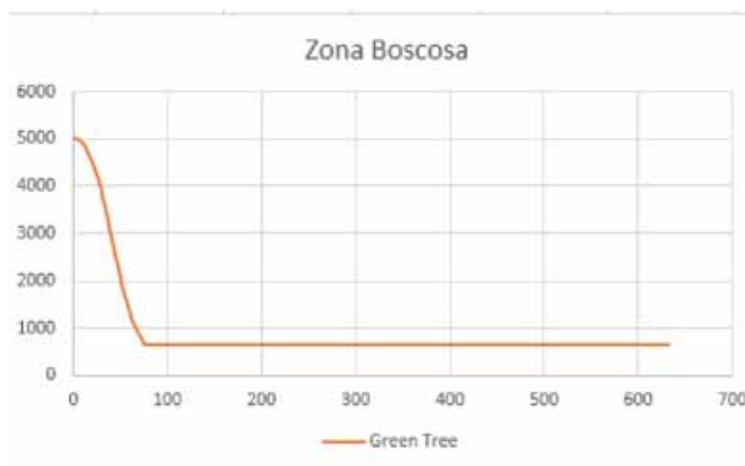


Figura 8. Interacción de los módulos y etapas propuestas.

En esta gráfica podemos observar la manera en como las zonas boscosas disminuyen durante el incendio, una vez que termino las zonas boscosas se mantienen estables.

Al llevar a cabo esta simulación se pudo observar como la *lattice* tendía a tener un efecto de percolación. Esto se debe al valor de la constante asignada anteriormente, dicho

valor es muy grande y por lo tanto causa ese efecto en la simulación.

Es de interés ver como se comporta la simulación con un menor valor de dicha constante para ser mas preciso 1.1. La *lattice* generada en esta ocasión fue la siguiente:

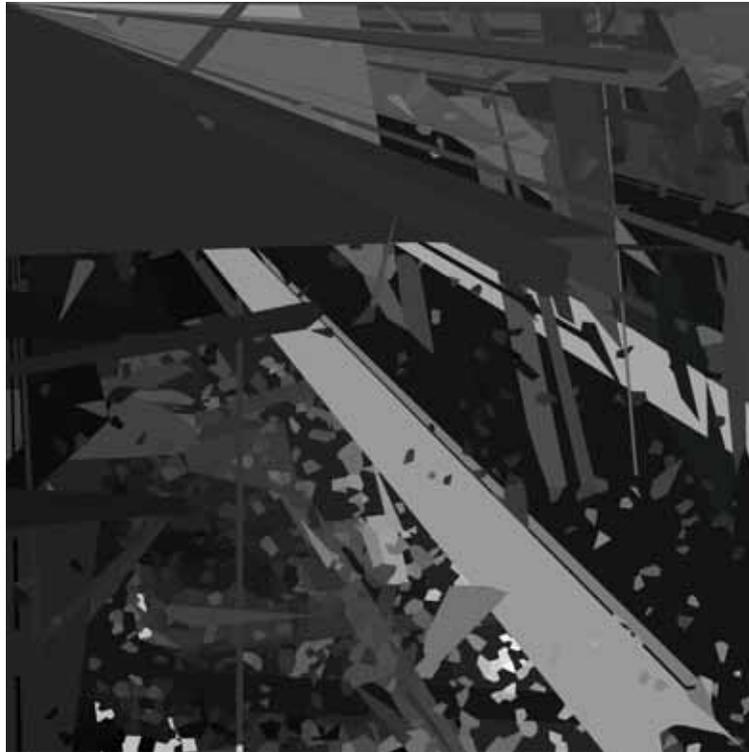


Figura 9. Gráfica general de tasa de propagación para un valor de constante menor.

En este caso (Figura 10) la cantidad de sitios quemados es muy baja, se debe a que la combustión duro un lapso de tiempo muy corto ya que la probabilidad de que un sitio se quemara es muy baja.



Figura 10. Gráfica general de tasa de propagación.

Si observamos la Figura 11 podemos notar que la combustión no sobrepasa la 20va iteración y que el máximo de sitios que logro incendiarse apenas fue de 4 sitios, lo que reafirma lo presentado en la Figura 10.



Figura 11. Gráfica de simulación de propagación de un incendio

Al presentar estos resultados podemos confirmar que el factor de la constante aporta mucho a la probabilidad de propagación, existe un valor de a entre $1.1 \leq constante \leq 2.5$ el cual define una tendencia a tener un efecto de percolación o no.

4.4. Velocidad del Viento (P_w)

Otro de los factores que se tomó en cuenta fue la velocidad y dirección del viento, cuando hablamos de como afecta esto se espera que un viento suficientemente fuerte sea capaz de ayudar a la propagación concentrándose en una misma dirección.

Se realizó una simulación en donde solo afecta este factor y estos fueron los resultados. El resultado del modelo generado se muestra en la Figura 12.

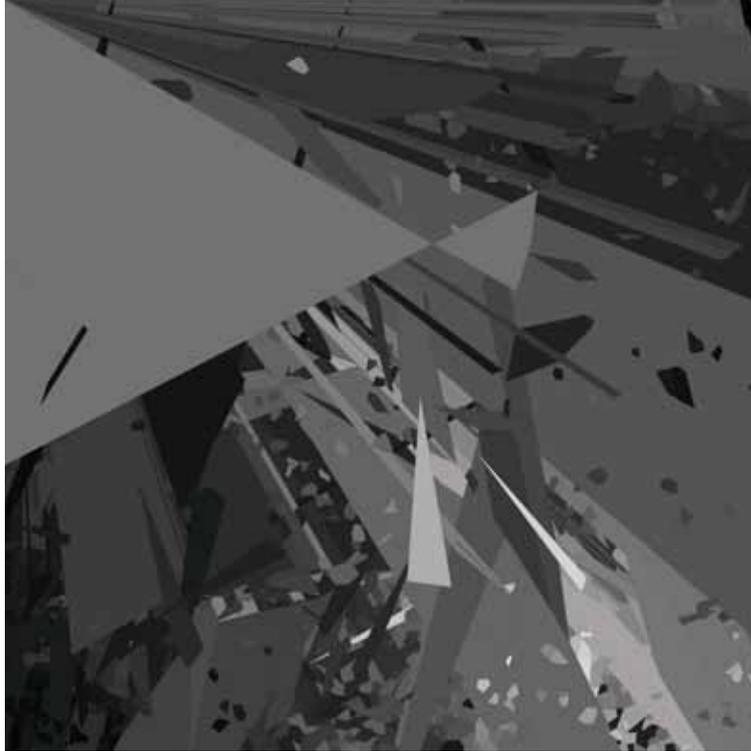


Figura 12. Lattice de simulación de velocidad del viento

En Figura 12 se pueden apreciar los efectos de la velocidad del viento pero para tenerlo mas claro nos enfocaremos en la Figura 13, la cual es una fracción de Figura 12.

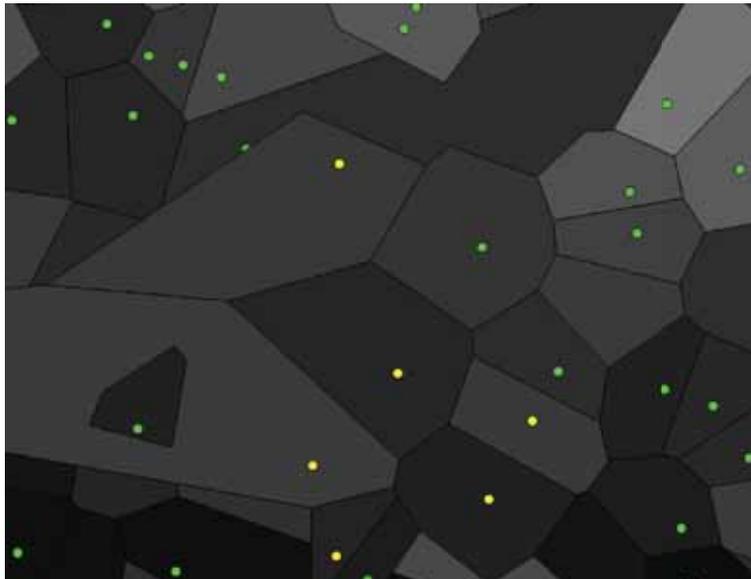


Figura 13. Fragmento de simulación de la velocidad del viento.

En la simulación se aplica una velocidad del viento de 50 km/hr con una dirección

al norte aproximadamente. En Figura 13 se puede apreciar esto, el origen del incendio se encuentra en el sitio mas cercano a la arista inferior de la imagen. En dicha simulación se puede apreciar como el fuego se propago hacia el norte del modelo para posteriormente extinguirse.

Si vemos estos datos en una gráfica podemos apreciar en la Figura 14 que la cantidad de cambios en los estados de la *lattice* no fue muy extrema.



Figura 14. Gráfica del estado completo de la *lattice* a través de la simulación.

Incluso si observamos la Figura 15 podremos notar que el tiempo en que los sitios se fueron quemando es muy corto. Pero aunque estos cambios no sean muy extremos el simple hecho de poder elegir el rumbo así como la velocidad de la propagación del incendio lo convierte en un factor que hay que tomar mucho en cuenta en la modelación de este tipo de problemas.



Figura 15. Gráfica de la propagación de fuego tomando en cuenta la velocidad del viento.

4.5. Elevación del Terreno (P_s)

El último de los factores considerado en este proyecto se trata de la elevación del terreno. El fuego se propaga más deprisa si el incendio se encuentra en un terreno que va cuesta arriba [14], pero para representar se toman las diferentes alturas de las zonas en la que se está modelando el incendio.

En este modelo cada sitio tiene como una de sus propiedades una altura y visualmente se representa a través de la escala de grises. Alrededor de las simulaciones se han mostrado diferentes configuraciones de *lattice* en los cuales se pueden notar las diferentes alturas a través de esta.

Para poder simular este efecto es necesario dar un par de constantes las cuales fueron extraídas de [2]. La simulación arrojó como resultado la Figura 16.

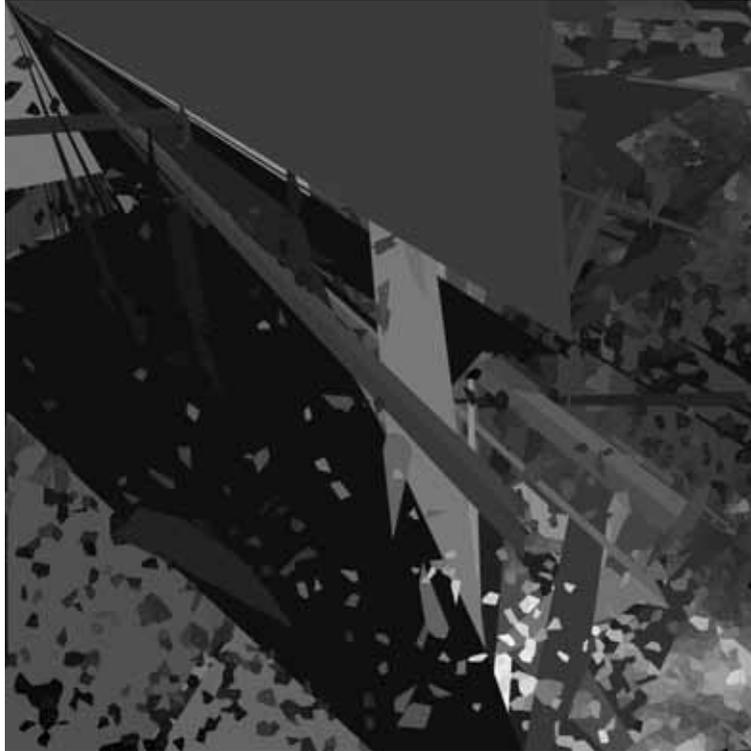


Figura 16. Lattice de la simulación que toma en cuenta la elevación del terreno.

Cuando vemos los datos de la simulación dentro de una gráfica como la de la Figura 17 podemos notar como el incendio comenzó a consumir el bosque de manera creciente. Esto se puede deber a que en la simulación el incendio se encontró con zonas mas planas donde se propago de manera mas uniforme.



Figura 17. Gráfica del estado de la lattice tomando en cuenta la velocidad del viento.

Si observamos la Figura 18 podemos ver que la misma propagación va en aumento y después llega el momento en que decrece, esto se debe a que el incendio consumió

toda la zona o que algún frente de altura hace que el fuego se propague con muy poca probabilidad.



Figura 18. Gráfica de la propagación de fuego tomando en cuenta la elevación del terreno.

Cada factor afecta a su manera la propagación de un incendio, y aun tomados estos factores un incendio forestal utiliza muchas cuestiones mas para determinar su comportamiento. Sin embargo, los factores que menciona [2] según los datos, arrojan datos bastante validos. En este modelo se realizó una última simulación donde cada factor ayuda a determinar el comportamiento del incendio. La *lattice* generada se muestra en la Figura 19.

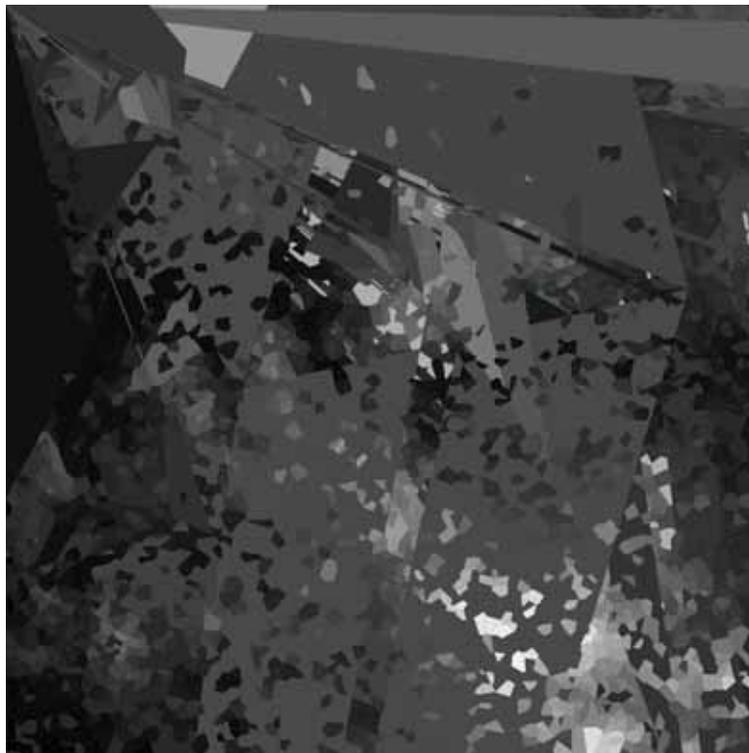


Figura 19. Lattice de la simulación que toma en cuenta todos los factores.

Los resultados de los datos generados por la simulación se pueden apreciar mejor en la Figura 20.



Figura 20. Gráfica de la configuración de la lattice tomando en cuenta todos los factores.

En esta simulación podemos apreciar que debido a las condiciones el incendio no consumió gran parte de la zona de árboles. Si observamos en la Figura 21 podemos observar que aparte de que el incendio no llegó a quemar gran parte de sitios, duró muy poco tiempo y al paso de tiempo se extinguió.



Figura 21. Gráfica de la propagación de fuego tomando en cuenta todos los factores.

Conclusiones

En el presente proyecto se probaron diversos factores que pueden afectar la dinámica de un incendio forestal usando las ecuaciones propuestas en el artículo [2] haciendo algunas modificaciones para adaptar dichas ecuaciones a una *lattice* con teselación irregular.

Analizando los resultados que el modelo arroja se puede concluir que el modelo describe adecuadamente la dinámica de un incendio forestal.

Trabajo Futuro

Debido a que en un incendio forestal intervienen distintos factores se propone profundizar más en ello, debido a que cada uno afecta a la tasa de propagación del incendio. Por ejemplo puede suceder que distintos tipos de vegetación afecten de manera distinta a la tasa de propagación. Lo anterior también puede ocurrir con otros factores como la densidad de la vegetación. De esta manera se espera que el modelo pueda describir con más realismo el incendio forestal.

Referencias

- [1] "Aster global dem, 2014, datos aster de elevación digital. versión 2. nasa eosdis land processes daac, usgs centro de observación y ciencia de los recursos terrestres (eros), sioux falls, dakota del sur (<https://lpdaac.usgs.gov>), accedió a [mm dd, yyyy], en <http://dx.doi.org/10.5067/aster/astgtm.002>."
- [2] C. A. Alexandridis, D. Vakalis y G. V. Bafas, "A cellular automata model for forest fire spread prediction: The case of the wildfire that swept through spetses island in 1990," *ELSEVIER*, vol. 204, pp. 191–201, oct 2008.
- [3] S. I. Pak y T. Hayakawa, "Forest fire modeling using cellular automata and percolation threshold analysis," en *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, June 2011, pp. 293–298.
- [4] G. P. Tiziano Ghisu, Bachisio Arca y P. Duce, "An optimal cellular automata algorithm for simulating wildfire spread," *ELSEVIER*, vol. 71, pp. 1–14, may 2015.
- [5] O. J. Avila Romero, "Simulación de tránsito vehicular dentro de una glorieta usando autómatas celulares." Proyecto terminal, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco, México, 2009.
- [6] P. I. Cervantes Tapia, "Diseño de un modelo estocástico basado en autómatas celulares que reproduce la dinámica de interacción de vehículos y motociclista en una vía multicarril," Proyecto terminal, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco, México, 2012.
- [7] L. D. Soriano Torres, "Dinámica de bacterias que proliferan en un implante médico usando un autómata celular de dos dimensiones," Proyecto terminal, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco, México, 2014.
- [8] C. N. Forestal(2018). Reporte semanal de resultados de incendios forestales 2016. [En línea]. Disponible: <http://www.conafor.gob.mx:8080/documentos/docs/10/5855Reporte%20Semanal%202016%20-%20Incendios%20Forestales.pdf>
- [9] C. N. Forestal(2010). Incendios forestales guía práctica para comunicadores(3ra edición). [En línea]. Disponible: <http://www.conafor.gob.mx:8080/documentos/docs/10/236Gu%C3%ADa%20pr%C3%A1ctica%20para%20comunicadores%20-%20Incendios%20Forestales.pdf>
- [10] I. Karafyllidis y A. Thanailakis, "A model for predicting forest fire spreading using cellular automata," *ELSEVIER*, vol. 99, pp. 87–97, jun 1997.
- [11] J. Kari, *Cellular Automata*, Spring, Ed., 2009.
- [12] O. C. Mark Overmars, Mark Theodoor Berg, *Computational Geometry, Algorithms and Applications*, M. Overmars, Ed., 1997.
- [13] GDAL. Gdal library. [En línea]. Disponible: <http://www.gisinternals.com/release.php>

- [14] G. S. B. David R. Weise, "Effects of wind velocity and slope on flame properties," *Scientific Journal (JRNL)*, vol. 26, pp. 1849–1858, June 1996.